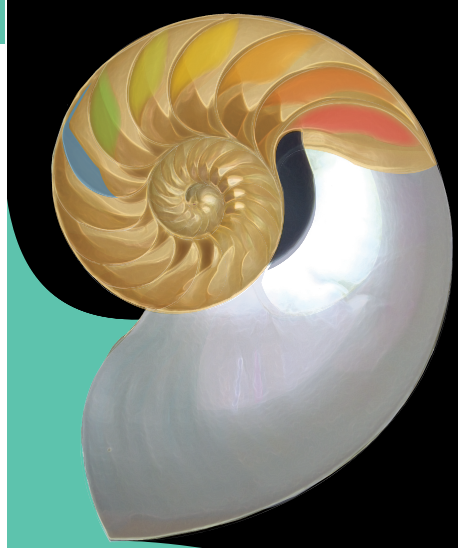
Grupos Topológicos

La topología y el álgebra, dos ramas muy importantes de la matemática, se relacionan de muchas maneras. La forma particular en la que lo hacen en grupos topológicos es el tema de este curso-taller.

En la primera parte veremos los conceptos y construcciones más elementales y los ejemplos. Daremos énfasis a los ejemplos que por sus aplicaciones en otras ramas de la matemática, como el análisis funcional y los sistemas dinámicos, resulten importantes e interesantes.

En la segunda parte veremos como la relación entre las operaciones de grupo y la topología determina muchas de las propiedades topológicas de las estructuras llamadas grupos topológicos. En partícular, veremos propiedades como compacidad, conexidad y metrizabilidad (Teorema Birkho-Kakutani sobre la metrizabilidad de los grupos topológicos primero numerable). El tratamiento procurará tener un estilo elemental sin detallar aspectos técnicos.



3er Coloquio

del Departamento de Matemáticas

Ixtapa Zihuatanejo, Gro.
Enero de 2010

Grupos Topológicos

Constancio Hernández García

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Casa abierta al tiempo

3^{er} Coloquio del Departamento de Matemáticas

Grupos Topológicos

Constancio Hernández García

Casa abierta al tiempo

Comité Organizador

Dr. Mario Pineda Ruelas
Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia
Dra. Blanca Rosa Pérez Salvador
Mat. Daniel Espinosa
Dr. Constancio Hernández García
Beatriz Arce Vargas (Apoyo logístico)

Material didáctico del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autonóma Metropolitana-Iztapalapa con el apoyo del Programa Integral de Fortalecimiento Institucional 3.3 (PIFI).

Grupos Topológicos

Constancio Hernández García

Departamento de Matemáticas, UAM-I

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Introducción

Los grupos topológicos son estructuras que aparecen de manera natural en muchas ramas de la matemática como análisis funcional, sistemas dinámicos, teoría de representación y muchos otros. Muchos objetos matemáticos presentan una combinación de estructura algebraica y estructura topológica. Espacios de funciones, espacios vectoriales topológicos, grupo de transformaciones y los campos topológicos son algunos de los ejemplos más importantes de este tipo de objetos. Un grupo topológico es un ente matemático que consta de un grupo con una topología y la relación que hay entre la topología y las operaciones del grupo son sencillas y naturales: las operaciones (la operación del grupo y la operación de tomar inverso) deben de ser continuas.

En grupos topológicos, la estructura algebráica determina propiedades de la estructura topológica. Un ejemplo sencillo de esto es que un grupo topológico siempre es homogéneo. Un ejemplo un poco menos sencillo es que un grupo topológico es metrizable siempre que sea primero numerable. Esta influencia es tan profunda y amplia que podríamos hablar de *"invariantes topológicos bajo condiciones algebráicas"*. De hecho, las ideas, conceptos y construcciones que surgen cuando el álgebra y la topología entran en contacto son tan variadas, interesantes y versátiles que presenta ante nosotros un campo de estudio extemadamente amplio e interesante. En este curso sólo tocaremos una parte muy ligera y superficial del tema.

Los grupos topológicos aparecen de una manera tan natural que no es posible decir quién inicia la teoría de grupos topológicos. Sin embargo, podemos mencionar a L. S. Pontryagin, A. A. Markov, N. Bourbaki, M. I. Graev, S. Kakutani y E. van Kampen como unos de los iniciadores de esta teoría. Más adelante, matemáticos como W. W. Comfort, J. van Mill, E. van Douwen, A. V. Arhangel'skii y M. G. Tkachenko hicieron importantes aportaciones.

En el capítulo 1, que es de caracter introductorio, definimos lo que es un grupo topológico, presentamos los ejemplos básicos y los hechos más generales. En el capítulo 1, veremos cocientes, productos y otro tipo de construcciones con grupos topológicos. En el capítulo 2, estudiaremos algunos tipos de grupos topológicos como los grupos localmente compactos y grupos completos. Esperamos que estos pocos temas de grupos topológicos despierten el interés en su estudio y resalten la importancia del tema en áreas como el análisis funcional y los sistemas dinámicos. Las presentes notas están basadas en el libro de Grupos Topológicos de Hernández, Tkachenko, Rendón Villegas [**51**].

El origen del concepto de grupo topológico los podemos remontar a los trabajos de Marius Sophus Lie (vea [**75**]), quién consideró grupos definidos por ralciones analíticas. Otro origen de los grupos topológicos la podemos hallar en los grupos de transformaciones (vea [**74**]). El siguiente avance lo tenemos en los conceptos introducidos por David Hilbert y Luitzen Egbertus Jan Brouwer en donde tenemos el desarrollo de grupos topológicos más generales que los grupos de Lie. Luitzen Brouwer, mejor conocido por su teorema de punto fijo, probó que el conjunto de Cantor set se le puede dar una estructura de grupo topológico abeliano.

La definición general de grupo topológico fue dada por Franciszek Leja en una comunicación publicada en la Academia Polaca de Ciencias [**73**] y por Otto Schreier en [**100**]. Los grupos topológicos localmente euclideanos fueron estudiados por Élie Joseph Cartan en [**14**].

André Weil da una axiomatización muy interesante de la noción de topología de un grupo topológico general en [**115**]. Según Pontryagin (vea [**95**]), Andréi Nikolayevich Kolmogorov observó que todo grupo topológico es un espacio regular. Más adelante, Pontryagin probó que todo grupo topológico es un espacio de Tychonoff.

Capítulo 1

Propiedades elementales de los grupos topológicos

1.1. Definición de grupo topológico

La mayor parte de las ocasiones, utilizaremos la notación multiplicativa para denotar la operación binaria. Si trabajamos con un grupo G usando la notación multiplicativa, reservaremos el símbolo e, o bien e_G, para denotar la identidad de G.

Un conjunto G con una operación binaria $\cdot$ y una familia τ de subconjuntos de G se llama *grupo topológico* si

1. $(G, \cdot)$ es un grupo;
2. (G, τ) es un espacio topológico;
3. las funciones $g_1\colon (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ y $g_2\colon (G,\tau) \to (G,\tau)$ dadas por $g_1(x,y) = x \cdot y$ y $g_2(x) = x^{-1}$ son continuas, donde x^{-1} es el inverso de x.

En ocasiones prescindiremos del uso del símbolo de operación binaria $\cdot$, es decir, en vez de $x \cdot y$ escribiremos simplemente xy. La continuidad de las funciones g_1 y g_2 equivale a pedir que la función $\varphi\colon G \times G \to G$ definida por $\varphi(x,y) = x \cdot y^{-1}$ sea continua. Observe que la operación inversa g_2 es un homeomorfismo de G en G. En efecto, como $g_2^{-1} = g_2$, la continuidad de g_2 implica de inmediato que g_2^{-1} es continua.

Sean A y B subconjuntos de un grupo G. Entonces AB denota al conjunto $\{ab : a \in A, b \in B\}$ y A^{-1} denota a $\{a^{-1} : a \in A\}$. A subconjunto A de un grupo G se llama *simétrico* si $A^{-1} = A$. Escribimos aB en lugar de $\{a\}B$ y Ba en lugar de $B\{a\}$. Abreviamos AA como A^2. De manera similar, $A^{-2} = A^{-1}A^{-1}$.

Sea G un grupo. Para cualquier elemento $a \in G$, las funciones $x \mapsto ax$ y $x \mapsto xa$ de G en G se llaman *traslaciones izquierda* y *derecha* de G por a y se denotan con λ_a y ρ_a, respectivamente. Las traslaciones son funciones biyectivas. Decimos que un grupo G es *abeliano* o *conmutativo* si $xy = yx$, para todo $x, y \in G$.

TEOREMA 1.1.1. *Considere un grupo topológico G. Si $g \in G$ es un elemento fijo arbitrario, entonces las traslaciones izquierda y derecha λ y ρ, de G en sí mismo, son homeomorfismos.*

Una consecuencia inmediata de este resultado es que un grupo topológico G es homogéneo. Veamos algunas consecuencias más: si $a \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G, entonces cuando O es abierto, los conjuntos $aO = \lambda_a(O)$, $Oa = \rho_a(O)$, O^{-1}, $MO = \bigcup_{a\in M} aO$ y $OM = \bigcup_{a\in M} OA$ son abiertos; cuando A es cerrado, aA, Aa, A^{-1} son cerrados. Si A y B son compactos, también lo son AB y A^{-1}. Se cumple que

$$\overline{A} = \bigcap_{W\in\mathcal{N}_{e_G}} AW = \bigcap_{W\in\mathcal{N}_{e_G}} WA.$$

Sea G un grupo topológico. Si denotamos como $\mathcal{N}_x$ a la familia de vecindades de un punto $x \in G$, la continuidad de las operaciones de G implica que si x y y son elementos de G, para cada $U \in \mathcal{N}_{xy}$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}_x$ y $W \in \mathcal{N}_y$ tales que $VW \subseteq U$; y para cada $U \in \mathcal{N}_{x^{-1}}$ existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

Con frecuencia nos referiremos al grupo topológico G con operación $\cdot$ y topología τ como la terna $(G, \cdot, \tau)$. Si no hay ambigüedad, usaremos sólo G.

Un subconjunto H de un grupo G se llama *subgrupo* de G si $xy \in H$, para $x, y \in H$, $x^{-1} \in H$ y $H \neq \varnothing$. Si H es un subgrupo de G entonces, para todo $a \in G$, $a^{-1}Ha$ también es un subgrupo de G. Si H es a subgrupo de G tal que $a^{-1}Ha = H$ para cada $a \in G$, entonces decimos que H es normal de G.

Si H es un subgrupo de un grupo G y $a \in G$, entonces los conjuntos aH y Ha se llaman *clases laterales izquierda* y *derecha* de H en G, respectivamente. Dos clases laterales derechas Ha y Hb son ajenas o coinciden. Más aún, $Ha = Hb$ si y sólo si $ab^{-1} \in H$. En efecto, $ab^{-1} \in H$ implica que $Hab^{-1} \subseteq H^2 = H$. Por lo tanto, $Ha \subseteq Hb$. De manera similar, como $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$, tenemos que $Hb \subseteq Ha$. En consecuencia, $Ha = Hb$. Recíprocamente, si $Ha = Hb$, entonces $h_1a = h_2b$ para algún $h_1, h_2 \in H$, de donde $ab^{-1} = h_1^{-1}h_2 \in H$.

Sea H un subgrupo normal de un grupo G. Entonces $aH = Ha$ para cada $a \in G$. En otras palabras, las clases laterales izquierdas de H son las mismas que las clases laterales derchas de H. Sobre el conjunto de todas las clases laterales de H definimos una multiplicación mediante la regla $aHbH = abH$. Es fácil ver que esta definición de multiplicación de clases es correcta. En efecto, suponga que $aH = a_1H$ y $bH = b_1H$ para $a, a_1 \in G$ y $b, b_1 \in G$. Entonces $aa_1^{-1} \in H$ y $bb_1^{-1} \in H$ de donde tenemos, por ser H normal en G, que

$$ab(a_1b_1)^{-1} = abb_1^{-1}a_1^{-1} \in aHa_1^{-1} = (aHa^{-1})aa_1^{-1} = Haa_1^{-1} = H.$$

En consecuencia, $aHbH = abH = a_1b_1H = a_1Hb_1H$, mostrando así que el resultado de multiplicar dos clases laterales no dependen de la elección de los representantes.

Para cada aH, tenemos que $(aH)H = (aH)(eH) = aH$ y $(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$. Esto muestra que H juega el papel de identidad en el conjunto de todas las clases laterales y que $a^{-1}H$ es el inverso de aH. Por lo tanto, el conjunto de todas las clases laterales de H es un grupo con respecto a la multiplicación definida antes. Este grupo se llama el *grupo cociente* de G y se denota por G/H. Observe que si G es un grupo abeliano, entonces el grupo cociente G/H está definido para cada subgrupo H de G.

Un *homomorfismo* de un grupo G en un grupo F es una función $f\colon G \to F$ tal que $f(ab) = f(a)f(b)$ para todos los $a, b \in G$. Dado un homomorfismo $f\colon G \to H$, el conjunto $\{x \in G : f(x) = e_H\}$ se llama el *núcleo* de f y se denota por $\ker f$. Se deduce de inmediato de la definición que $\ker f$ es un subgrupo de G.

Decimos que una función biyectiva $f\colon G \to H$ entre dos grupos topológicos G y H es un *isomorfismo topológico* si f y f^{-1} son homomorfismos continuos. Si $G = H$, el isomorfismo f se llama *automorfismo topológico.* Dos grupos topológicos son *topológicamente isomorfos* si existe un isomorfismo topológico de uno al otro. Utilizaremos el símbolo $G \cong H$ para indicar que los grupos G y H son topológicamente isomorfos.

Es fácil ver que un isomorfismo topológico y su inverso son homomorfismos abiertos. En el siguiente teorema podemos observar que un grupo topológico no abeliano admite muchos automorfismos.

TEOREMA 1.1.2. *Sean G es un grupo topológico y $a \in G$. Entonces la función $g(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo topológico.*

En el caso de los grupos abelianos, los automorfismos definidos en el teorema anterior son triviales, es decir, son la identidad.

La topología de un grupo topológico es más fácil que describir que la de un espacio topológico arbitrario. Basta describir una base local para la identidad e_G del grupo.

LEMA 1.1.3. *Sea G un grupo topológico, y sea $\mathcal{N}_{e_G}$ una base local para la identidad e_G del grupo. Entonces las familias $\{xU\}$ y $\{Ux\}$, donde x toma valores en los elementos de G y U varía sobre todos los elementos de $\mathcal{N}_{e_G}$, son bases para la topología de grupo de G.*

El lema siguiente nos proporciona una base local para la identidad formada por vecindades *simétricas.*

LEMA 1.1.4. *Si G es un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, entonces existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad e_G constituyen una base local para e_G.*

LEMA 1.1.5. *Sea G un grupo topológico.*

1. *Si $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ con $V^n \subseteq U$ ($V^n = V \cdot \cdots \cdot V$, n factores).*
2. *Si $U \in \mathcal{N}_{e_G}$, entonces existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ con $\overline{V} \subseteq U$. En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen una base local de la identidad cuyos elementos son subconjuntos cerrados.*

En lo sucesivo denotaremos con $\mathcal{N}^*(e_G)$ la base de vecindades abiertas y simétricas para la identidad e_G de un grupo topológico G. Sean G un grupo topológico, $U \in \mathcal{N}_{e_G}$ y $n \in \mathbb{N}^+$, entonces de la continuidad de la operación de grupo, vemos que existe $V \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $V^n \subseteq U$. Suponga que $U \in \mathcal{N}^*_{e_G}$ y que $U^2 \subseteq B$, entonces $\overline{U} \subseteq B$. En efecto, si $x \in \overline{U}$, entonces $xU \cap U \neq \varnothing$; es decir, existen $u_1, u_2 \in U$ tales que $xu_1 = u_2$, por lo cual $x = u_2u_1^{-1} \in UU^{-1} = U^2 \subseteq B$. Así que $\overline{U} \subseteq B$.

Ya sabemos que todo grupo topológico es un espacio homogéneo. Por lo tanto, para demostrar propiedades locales en un grupo topológico (por ejemplo, conexidad local, compacidad local, carácter numerable, etc.) es suficiente con verificar la propiedad en la identidad del grupo. Una de éstas es la propiedad T_3.

PROPOSICIÓN 1.1.6. *Sea G un grupo topológico. Si $A \subseteq G$ es compacto y $B \subseteq G$ cerrado, entonces AB y BA son cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que BA es cerrado. Para ello, veremos que $G \setminus BA$ es abierto. Sea $a \in G \setminus BA$. Para cada $x \in A$ el conjunto Bx es cerrado, así que existen vecindades $U_x, V_x \in \mathcal{N}^*(e_G)$ con $aU_x \cap Bx = \varnothing$ y $V_x^2 \subseteq U_x$. , $aV_x \cap BxV_x = \varnothing$. Los abiertos xV_x, con $x \in A$, cubren a A, así que existe una subfamilia finita, $x_iV_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, que cubre a A.

Sea

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

El conjunto W es abierto y simétrico, y además $aW \cap Bx_iV_{x_i} = \varnothing$ para todo $i \leq n$. Por lo tanto, $aW \bigcap BA = \varnothing$. Así que aW es una vecindad abierta de a ajena a BA. En forma similar se prueba que el producto AB es cerrado en G. □

Si G es un grupo no trivial con la topología indiscreta, tenemos un grupo topológico que no es T_1 o T_0. Pero si un grupo topológico es T_0, dado que también es T_3, el grupo es regular y por lo tanto es un espacio de Hausdorff. En adelante consideraremos sólo grupos T_0, es decir, todos nuestros grupos serán espacios regulares. De hecho, más adelante se probará que todo grupo T_0 es un espacio de Tikhonov. Observe que para todo grupo topológico G, la propiedad de ser T_0 equivale a ser T_1; en particular, $\{e_G\}$ es un conjunto cerrado en G.

En los grupos topológicos los subespacios compactos tienen propiedades similares a las de los puntos en relación con las condiciones de separación.

TEOREMA 1.1.7. *Sea G un grupo topológico, $K \subseteq U \subseteq G$, U abierto y K compacto. Entonces existe $W \in \mathcal{N}_{e_G}$ con la siguiente propiedad:*

$$K \subseteq KW \subseteq U.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $x \in K$ existe $V_x \in \mathcal{N}_{e_G}$ con $xV_x \subseteq U$. Además, existe $W_x \in \mathcal{N}_{e_G}$ tal que $W_xW_x \subseteq V_x$.

Dado que K es compacto y $K \subseteq \bigcup_{x\in K} xW_x$, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i W_{x_i}.$$

Sea $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$. El conjunto W es una vecindad abierta de e_G y cumple una de las propiedades requeridas: $K \subseteq KW$. Si $x \in K$, entonces $x \in x_jW_{x_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Así,

$$xW \subseteq x_jW_{x_j}W \subseteq x_jW_{x_j}W_{x_j} \subseteq x_jV_{x_j} \subseteq U,$$

es decir $KW \subseteq U$. □

1.2. Base de vecindades de la identidad en un grupo topológico

Sea G un grupo infinito. En el siguiente resultado nos permite entender que condiciones caracterizan a las vecindades de la identidad. Es decir, dada una familia $\mathcal{N}_{e_G}$ de subconjuntos de G que condiciones la caracterizan como la familia de vecindades de la identidad de un topología que convierta a G en un grupo topológico.

TEOREMA 1.2.1. *Sean G un grupo topológico de Hausdorff y $\mathcal{V}$ base local para e_G. Entonces.*

i) para todo $U \in \mathcal{V}$, existe un elemento $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subseteq U$;
ii) para todo $U \in \mathcal{V}$, existe un elemento $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$;
iii) para todo $U \in \mathcal{V}$ y todo $x \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $Vx \subseteq U$;
iv) para todo $U \in \mathcal{V}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$;
v) para $U, V \in \mathcal{V}$, existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$;
vi) $\{e\} = \bigcap \mathcal{V}$.

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia $\mathcal{V}$ no vacía de subconjuntos de G tales que se satisfacen las condiciones i) a iv), entonces cada una de las familias $\{xU : U \in \mathcal{V},\ x \in G\}$ y $\{Ux : U \in \mathcal{V},\ x \in G\}$

es base para una topología de grupo τ para G. Además, $\mathcal{V}$ es una base local para e_G en (G,τ).

Demostración. Sea G un grupo topológico Hausdorff, entonces de la continuidad de $(x,y) \mapsto xy$ y $x \mapsto x^{-1}$ en e, tenemos i) y ii). La propiedad iii) se deduce de la continuidad de las traslaciones izquierdas en G. De manera similar, la propiedad iv) de duduce de que las funciones $x \mapsto axa^{-1}$ son homeomorfismos de G. La propiedad v) es clara porque $\mathcal{V}$ es una base de abiertos en e. La propiedad vi) también es clara porque G es un espacio T_2 y $\mathcal{V}$ es una base de conjuntos abiertos en e.

Ahora probaremos la afirmación inversa. Sea $\mathcal{V}$ una familia de subconjuntos de G que satisface las condiciones i) a vi) del teorema.

Sea τ la familia de todos los subconjuntos W de G tales que para cada $x \in W$, existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $Ux \subseteq W$. Afirmamos que τ es una topología de G. En efecto, es claro que $\bigcup \gamma \in \tau$ para cualquier subfamilia γ de τ. Suponga $W_1 \in \tau$ y $W_2 \in \tau$, y ponga $W = W_1 \cap W_2$. Debemos probar que $W \in \tau$. Tome $x \in W$. Existen $U_1 \in \mathcal{V}$ y $U_2 \in \mathcal{V}$ tales que $U_1 x \subseteq W_1$ y $U_2 x \subseteq W_2$. De v) deducimos que existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Es claro que $Ux \subseteq W_1 \cap W_2 = W$. De donde, $W \in \tau$, y τ es una topología de G.

Observe que $Ux \in \tau$, para cada $x \in G$ y cada $U \in \mathcal{V}$. En efecto, tome $y \in Ux$. Entonces $yx^{-1} \in U$. Por la propiedad iii), existe un elemento $V \in \mathcal{V}$ tal que $Vyx^{-1} \subseteq U$. Por lo tanto, $Vy \subseteq Ux$. De donde, $Ux \in \tau$.

Tenemos entonces que la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{Ua : a \in G,\ U \in \mathcal{V}\}$ es una base para la topología τ. De donde, $\tau = \tau_{\mathcal{V}}$.

Ahora probaremos que la multiplicación $(a,b) \mapsto ab^{-1}$ de G es continua con respecto a la topología τ. Sean a y b elementos de G, y O un elemento de τ tal que $ab \in O$. Entonces existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $Wab \subseteq O$. Ahora, es suficiente hallar $U \in \mathcal{V}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $UaVb \subseteq Wab$ o bien $UaV \subseteq Wa$. Esto último, es equivalnte, a su vez, que $U(aVa^{-1}) \subseteq W$. Ahora, podemos ver cómo elegir U y V en $\mathcal{V}$. Primero, aplicamos i) para elegir $U \in \mathcal{V}$ tal que $U^2 \subseteq W$. Luego de esto, usamos iv) para elegir $V \in \mathcal{V}$ tal que $aVa^{-1} \subseteq U$. Entonces, por la elección de U y V, tenemos $U(aVa^{-1}) \subseteq U^2 \subseteq W$ lo cuál implica que $UaVb \subseteq Wab$. Así, la multiplicación en G es continua con respecto a la topología τ. En particular, todas las translaciones derechas e izquierdas de G son continuas, y el espacio (G,τ) es homogéneo. Una consecuencia inmediata de que las traslaciones izquierdas son continuas es que $bV \in \tau$, para todo $b \in G$ y $V \in \tau$.

A continuación, probaremos que la función g_2 de G sobre G dada por $g_2(x) = x^{-1}$ es continua con respecto a la topología τ. Para este propósito, basta probar que los conjuntos $a^{-1}U^{-1}$ están en τ para cada $a \in G$ y $U \in \mathcal{V}$. Pero por la continuidad de la traslación izquierda, es suficiente si probamos que $U^{-1} \in \tau$. Sea $x \in U^{-1}$. Entonces $x^{-1} \in U$. Por lo tanto $iii)$ implica que $Vx^{-1} \subseteq U$ para alguna $V \in \mathcal{V}$. Aplicamos $ii)$ para elegir $W \in \mathcal{V}$ tal que $W^{-1} \subseteq V$. Entonces $W^{-1}x^{-1} \subseteq Vx^{-1} \subseteq U$, de donde deducimos que $xW = (W^{-1}x^{-1})^{-1} \subseteq U^{-1}$. Como xW es una vecindad abierta de x en (G, τ), deducimos que U^{-1} está τ. Esto prueba que g_2 es continua.

Por último, $vi)$ y la homogeneidad de G implican τ cumple el axioma de separación T_2. Esto termina la prueba del teorema. □

De la proposición 1.1.6, sabemos que si A, $B \subseteq G$ con G un grupo topológico, A compacto y B cerrado, entonces AB y BA son cerrados. Sin embargo, la hipótesis de que A es compacto es imprescindible, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2.2. Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la suma usual y con su topología usual, es decir, aquella generada por los intervalos abiertos $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Sabemos que $\mathbb{R}$ es un grupo y que las operaciones $x \mapsto -x$ y $(x, y) \mapsto x + y$ son continuas (la suma toma el lugar de la multiplicación en el caso del grupo aditivo de los reales).

Es fácil probar que el conjunto $B = \mathbb{Z}$ de todos los números enteros es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, lo mismo que el conjunto $A = \{m + \frac{1}{m+1} : m \in \mathbb{N}^+\}$. Si consideramos la suma $A + B$, resulta no ser un conjunto cerrado, pues todo $m \in \mathbb{Z}$ es punto de acumulación de $A + B$ pero claramente $m \notin A + B$.

Veamos algunos ejemplos de grupos topológicos más.

EJEMPLO 1.2.3. Sea G un grupo arbitrario con la topología discreta, es decir, aquella formada por todos los subconjuntos de G; entonces G forma un grupo topológico llamado *grupo discreto*.

EJEMPLO 1.2.4. En el grupo aditivo de los números enteros, $(\mathbb{Z}, +)$, definiremos varias topologías de grupo.

Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo fijo y para cada $k = 1, 2, \ldots$, sea $U_k = p^k\mathbb{Z}$; entonces la familia $\mathcal{V} = \{U_k : k = 1, 2, \ldots\}$ satisface las condiciones del teorema 1.2.1: todos los miembros de $\mathcal{V}$ contienen al cero y de $U_k + U_k = U_k$ obtenemos $i)$. La condición $ii)$ se deduce de la relación $U_k = -U_k$. Si $x \in U_k$, entonces $U_k + x = U_k$. De este hecho obtenemos $iii)$. La propiedad $iv)$ es inmediata porque $\mathbb{Z}$ es abeliano. Como $U_k \subseteq U_l$ siempre que $l \leq k$ se cumple $v)$. Por último, $vi)$ es evidente.

Esta topología de G recibe el nombre de *p-ádica.* Para números primos distintos p y q, las topologías obtenidas de esta manera son distintas porque el conjunto $M = \{p, p^2, \dots, p^n, \dots\}$ tiene a $0 \in \mathbb{Z}$ como punto de acumulación en la p-ádica. Por el contrario, el 0 no es punto de acumulación de M en la q-ádica.

EJEMPLO 1.2.5 (El grupo lineal general de orden n sobre $\mathbb{R}$). Considere el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de las matrices no singulares (invertibles) de orden n con elementos en el campo de los números reales $\mathbb{R}$ y como operación de grupo, la multiplicación de matrices.

En $GL(n, \mathbb{R})$ considere la topología heredada por ser un subespacio del espacio euclidiano real de dimensión n^2, es decir, con la topología generada por la métrica

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{i,j} - B_{i,j}|^2},$$

para cualesquier $A = (A_{i,j})$, $B = (B_{i,j}) \in GL(n, \mathbb{R})$. Observe que la función $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ es continua porque los elementos de la matriz producto son sumas de productos de los elementos de A y B.

EJEMPLO 1.2.6. Denote con $\mathbf{Q}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales $q = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$, donde a, b,c, d son números reales $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son símbolos especiales que cumplen $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ y $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. Introducimos la suma usual de coordenada a coordenada en $\mathbf{Q}$, es decir,

$$[a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d] + [a' + \mathbf{i}b' + \mathbf{j}c' + \mathbf{k}d'] = (a + a') + \mathbf{i}(b + b') + \mathbf{j}(c + c') + \mathbf{k}(d + d').$$

Con esta suma, $\mathbf{Q}$ es un grupo conmutativo llamado el *grupo aditivo de los cuaterniones.*

El producto de dos cuaterniones $q = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$ y $q' = a' + \mathbf{i}b' + \mathbf{j}c' + \mathbf{k}d'$ está formado multiplicando de manera formal las expresiones lineales y aplicando las igualdades anteriores y las reglas de conmutatividad $x\mathbf{i} = \mathbf{i}x$, $x\mathbf{j} = \mathbf{j}x$, $x\mathbf{k} = \mathbf{k}x$ para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d)(a' + \mathbf{i}b' + \mathbf{j}c' + \mathbf{k}d') = (&aa' - bb' - cc' - dd') \\ &+ \mathbf{i}(ab' + ba' + cd' - dc') \\ &+ \mathbf{j}(ac' - bd' + ca' + db') \\ &+ \mathbf{k}(ad' + bc' - cb' + da').\end{aligned}$$

Dejamos al lector la verificación del hecho de que la multiplicación en $\mathbf{Q}$ es asociativa. Es claro que $\mathbf{Q}$ tiene el elemento neutro $\mathbf{1} = 1 + \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0$ con respecto a la multiplicación. Un conjunto con una operación asociativa que tiene un neutro se llama *monoide.* Esto es $(\mathbf{Q}, \cdot)$ es un monoide no conmutativo. Además, la suma y la multiplicación en $\mathbf{Q}$ cumplen la ley distributiva. Es decir, $\mathbf{Q}$ es un anillo no conmutativo.

Sea $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0} = 0 + \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0$ es el *cero* de $\mathbf{Q}$. Resulta que todo elemento diferente de cero $q \in \mathbf{Q}$ es invertible. En efecto, para $q = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$, haga $\bar{q} = a - \mathbf{i}b - \mathbf{j}c - \mathbf{k}d$. Es fácil verificar que $q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. En efecto, si $q \neq \mathbf{0}$, entonces $r = \bar{q}\alpha$ es un inverso de q, donde $\alpha = 1/(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. Como $\mathbf{Q}$ es un monoide, el inverso de q es único, y $\mathbf{Q}^*$ es un grupo multiplicativo. La estructura $\mathbf{Q}^*$ se le suele llamar el *grupo multiplicativo de los cuaterniones*. Observe que $U = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ es un subgrupo de $\mathbf{Q}^*$ llamado el *grupo de las unidades cuaterniónicas*.

Considere la función natural $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbb{R}^4$ definido por la regla $f(q) = (x, y, z, t)$, para cada $q = x + \mathbf{i}y + \mathbf{j}z + \mathbf{k}t \in \mathbf{Q}$. Es claro que f es una biyección de $\mathbf{Q}$ sobre $\mathbb{R}^4$. Damos topología a $\mathbf{Q}$ declarando que la función f es un homeomorfismo. En otras palabras, un subconjunto U de $\mathbf{Q}$ es abierto si, y sólo si, la imagen $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^4$. Esta especificación hace de $\mathbf{Q}$ un grupo localmente compacto segundo numerable Hausdorff. Es claro que la restricción de f a $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ no es un homomorfismo del grupo multiplicativo $\mathbf{Q}^*$ en grupo aditivo $\mathbb{R}^4$. Sin embargo, $\mathbf{Q}^*$ con esta topología (llamada euclideana) resulta ser un grupo topológico. Este hecho se deduce de la definición de multiplicación y de el procedimiento de inversion en $\mathbf{Q}^*$ decrito unas líneas más arriba. Por lo tanto, el grupo multiplicativo de los cuaterniones $\mathbf{Q}^*$ con la topología euclideana es un grupo topológico localmente compacto Hausdorff.

Ahora, en el ejemplo siguiente construímos, para todo entero $r > 1$, el grupo aditivo Ω_r de los números r-diádicos.

EJEMPLO 1.2.7. Sea G un grupo topológico group y X un espacio topológico. Considere el conjunto de todas las funciones continuas de X en G, con la operación definida punto por punto con la topología de la convergencia punto por punto. Este objeto, denotado $C_p(X, G)$, es un grupo topológico. Observe que $C_p(X, G)$ es un subgrupo del producto G^X de $|X|$ copias del grupo G.

1.3. Homomorfismos e isomorfismos

Ahora estudiaremos los conceptos de morfismos para grupos topológicos.

Decimos que el homomorfismo $f\colon G \to G'$ es *abierto* si f es una función abierta.

El concepto de homomorfismo abierto es muy importante porque permite establecer el concepto de grupos topológicos equivalentes.

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas de las propiedades elementales más importantes de los homomorfismos continuos.

El lector con experiencia en análisis funcional recordará que basta probar la continuidad de un operador lineal en la identidad de un espacio vectorial topológico para saber que es continuo en todo el espacio. Esta propiedad es aún válida para grupos topológicos.

LEMA 1.3.1. *Sea $\varphi\colon G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. El homomorfismo φ es continuo (respectivamente abierto) si lo es en la identidad e_G, es decir, si φ satisface la condición i) (respectivamente ii)) siguiente:*

i) Para toda W vecindad de e_H en H, existe U vecindad de e_G en G tal que $\varphi(U) \subseteq W$;
ii) para toda vecindad U de e_G en G, existe W vecindad de e_H tal que $W \subseteq \varphi(U)$.

DEMOSTRACIÓN. Suponiendo que se cumple la condición i), debemos probar que φ es continua en todo punto de G. Basta demostrar que si $g \in G$ y W es una vecindad de $\varphi(g)$ en H, entonces existe una vecindad U de g en G tal que $\varphi(U) \subseteq W$.

Sean $g \in G$ y W una vecindad de $h = \varphi(g)$ en H. Podemos expresar a W como $W = hW'$, donde W' es una vecindad de e_H. Por la condición i), existe una vecindad U' de e_G tal que $\varphi(U') \subseteq W'$. Entonces gU' es una vecindad de g y $\varphi(gU') = \varphi(g)\varphi(U') = h\varphi(U') \subseteq hW'$, como se quería demostrar.

Para la segunda afirmación debemos probar que dado un abierto O en G, su imagen respecto a φ es abierta en H.

Así pues, sea O abierto en G y $h \in \varphi(O)$; entonces $h = \varphi(g)$ para alguna $g \in O$. Por lo anterior, $g^{-1}O$ es una vecindad de e_G y según la condición ii), existe una vecindad W de e_H que cumple con $W \subseteq \varphi(g^{-1}O) = \varphi(g)^{-1}\varphi(O)$, de donde se desprende que $\varphi(g)W \subseteq \varphi(O)$. Resta observar que $\varphi(g)W = hW$ es una vecindad de h. □

El siguiente es un ejemplo de un homomorfismo continuo que no es abierto.

EJEMPLO 1.3.2. Sea $\mathbb{R}$ los reales con la topología euclideana y G el grupo topológico que se obtiene al dar a los reales la topología discreta; entonces la función identidad de G en $\mathbb{R}$ es un homomorfismo continuo que no es abierto.

1.4. Subgrupos topológicos y grupo cociente

De manera similar al caso de subespacios topológicos, la operación de tomar subgrupos topológicos es una fuente muy importante para construir "nuevos" grupos topológicos a partir de los ya conocidos.

Observe que si G un grupo topológico, H es un subgrupo de G, entonces H es un grupo topológico con la topología que hereda de G es un grupo topológico que se llama *subgrupo topológico* de G si

El siguiente resultado justifica la definición de subgrupo topológico en el sentido de que este último es por sí mismo un grupo topológico.

Los siguientes resultados presentan algunas propiedades del operador cerradura dentro de un grupo topológico.

PROPOSICIÓN 1.4.1. *Si A y B son subconjuntos de un grupo topológico G, entonces*

1. $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{AB}$;
2. $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$;
3. $x\overline{A}y = \overline{xAy}$, *para cualesquier elementos* x, y *de* G;
4. *si* $ab = ba$ *para toda* $a \in A$ *y* $b \in B$, *entonces* $ab = ba$ *para toda* $a \in \overline{A}$ *y* $b \in \overline{B}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ y W un abierto que contiene a xy. Existen abiertos V_1, V_2 con $x \in V_1$, $y \in V_2$ tales que $V_1 \cdot V_2 \subseteq W$. Ya que $x \in \overline{A}$ y $y \in \overline{B}$, existen elementos $a, b \in G$ tales que $a \in A \cap V_1$, $b \in B \cap V_2$, y por lo tanto $ab \in (AB) \cap W \neq \emptyset$, de modo que $xy \in \overline{AB}$.

Las afirmaciones (2) y (3) se deducen del hecho de que para cualquier homeomorfismo $f\colon X \to Y$ se tiene que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, para todo $A \subseteq X$, y de observar que las funciones $z \to z^{-1}$ y $z \to xzy$ son homeomorfismos para x y y fijos.

Para probar (4) considere la función $h\colon G \times G \to G$ dada por $h(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$. La función h es continua, por lo que el conjunto $H = \{(a, b) \in G \times G : aba^{-1}b^{-1} = e_G\}$ es cerrado. Además, se tiene que $A \times B \subseteq H$ y $\overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$, de donde se deduce que $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq H$. Es decir, $ab = ba$, para todo elemento a de $\overline{A}$ y todo elemento b de $\overline{B}$. □

PROPOSICIÓN 1.4.2. *Sean G un grupo topológico y H, N subgrupos de G. Entonces*

1. $\overline{H}$ *es un subgrupo de* G;
2. *si* N *es un subgrupo normal de* G, *entonces* $\overline{N}$ *es un subgrupo normal de* G;
3. H *es abierto si y sólo si su interior no es vacío;*
4. *si* H *es abierto, entonces* $\overline{H} = H$.

DEMOSTRACIÓN. 1) Veamos que $\overline{H}$ es un subgrupo. Puesto que H es un subgrupo de G, tenemos que $H^2 \subseteq H$ y por (1) de la proposición 1.4.1, $(\overline{H})^2 \subseteq \overline{H^2} \subseteq \overline{H}$. También por hipótesis, $H^{-1} \subseteq H$ y por (2) de la proposición 1.4.1, $(\overline{H})^{-1} = \overline{H^{-1}} \subseteq \overline{H}$, de donde se deduce que $\overline{H}$ es un subgrupo.

2) Por hipótesis se tiene que $a^{-1}Na \subseteq N$ para todo $a \in G$, y si aplicamos (3) de la proposición anterior, obtenemos que $a^{-1}\overline{N}a = \overline{a^{-1}Na} \subseteq \overline{N}$ para todo $a \in G$, es decir, $\overline{N}$ es un subgrupo normal de G.

3) Si H es abierto en G, entonces por definición todos sus puntos son interiores y por tanto su interior no es vacío. Recíprocamente, si x es un punto interior de H en G, entonces existe una vecindad U de e_G en G tal que $xU \subseteq H$. Para todo $y \in H$ se tiene que $yU = yx^{-1}xU \subseteq yx^{-1}H = H$. Por tanto, H es abierto.

4) Si H es un subgrupo de G, entonces $G \setminus H = \bigcup\{Hx : x \notin H\}$. Además, por ser H abierto, cada conjunto Hx es abierto y por tanto $G \setminus H$ es abierto, es decir, H es cerrado. □

El próximo resultado nos muestra cómo generar subgrupos abiertos a partir de vecindades de la identidad.

TEOREMA 1.4.3. *Sean G un grupo topológico y U cualquier vecindad abierta simétrica de la identidad e_G. Entonces el conjunto $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ es un subgrupo abierto y cerrado de G.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in L$; digamos que $x \in U^k$, $y \in U^l$ para k y $l \geq 1$. Entonces $xy \in U^{k+l} \subseteq L$ y $x^{-1} \in (U^{-1})^k = U^k$. Por lo tanto, L es un subgrupo de G. Claramente L es abierto por ser unión de abiertos y cerrado por (4) de la proposición 1.4.2. □

El siguiente resultado utiliza el hecho de que los grupos topológicos son espacios homogéneos.

PROPOSICIÓN 1.4.4. *Un subgrupo H de un grupo topológico G es discreto si y sólo si tiene un punto aislado.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es inmediata.

Suficiencia: sea x un punto aislado de H; entonces existe una vecindad abierta U de e_G en G tal que $Ux \cap H = \{x\}$. Para $y \in H$ arbitrario se tiene que $Uy \cap H = Uy \cap Hx^{-1}y = (Ux \cap H)x^{-1}y = \{y\}$; es decir, todos los puntos de H son aislados. □

El siguiente lema nos proporciona una condición suficiente para probar que un subgrupo topológico es cerrado.

LEMA 1.4.5. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo de G tales que $\overline{U} \cap H$ es cerrado en G para alguna vecindad abierta U de e_G en G. Entonces H es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U una vecindad abierta de e_G en G tal que $\overline{U} \cap H$ es cerrado en G, y sea V una vecindad abierta de e_G en G tal que $V^2 \subseteq U$. Para cualquier $x \in \overline{H}$, queremos probar que $x \in H$. Como $x^{-1} \in \overline{H}$, pues $\overline{H}$ es subgrupo, existe $y \in x^{-1}V \cap H$. Se afirma que

$xy \in \overline{U} \cap H$. En caso contrario, por ser $\overline{U} \cap H$ un conjunto cerrado, existiría una vecindad abierta W de e_G en G tal que $Wxy \cap \overline{U} \cap H = \varnothing$. Es claro que $x \in (W \cap V)x$, y como $x \in \overline{H}$, existiría $z \in (W \cap V)x \cap H$, pero entonces $zy \in Vxx^{-1}V = V^2 \subseteq U$, $zy \in HH = H$ y $zy \in (Wx)y = Wxy$, lo cual contradice la elección de W. Por lo tanto, $xy \in \overline{U} \cap H$ y entonces $x = (xy)y^{-1} \in H$. $\square$

El siguiente teorema presenta una propiedad exclusiva de los grupos topológicos, pues no todo subesapcio discreto de un espacio topológico es cerrado.

PROPOSICIÓN 1.4.6. *Todo subgrupo discreto H de un grupo topológico G es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U una vecindad abierta de e_G en G tal que $U \cap H = \{e_G\}$. Por (2) del lema 1.1.5, existe una vecindad abierta V de e_G en G tal que $\overline{V} \subseteq U$. Entonces $\overline{V} \cap H = \{e_G\}$, el cual es un conjunto cerrado ya que G es un espacio de Hausdorff. El lema 1.4.5 implica entonces que H es cerrado. $\square$

Pasemos ahora al estudio de grupos cocientes. Definiremos una topología de grupo en el conjunto de clases laterales.

Recordemos que si G es un grupo topológico y H es un subgrupo de G, entonces se define una relación de equivalencia en G como $a \sim_d b$ si y sólo si $ab^{-1} \in H$. Las clases de equivalencia de esta relación reciben el nombre de clases laterales derechas de H. Denotaremos con G/H al conjunto formado por las clases laterales derechas, es decir, $G/H = \{Ha : a \in G\}$. De manera similar se definen las clases laterales izquierdas de H. Usaremos la misma notación para designar al conjunto formado por dichas clases, es decir $G/H = \{aH : a \in G\}$. Los siguientes resultados se establecen para el conjunto G/H de clases laterales derechas y los resultados correspondientes se cumplen para el conjunto de clases laterales izquierdas.

Introducimos en G/H una topología de la manera siguiente. Sea $\mathcal{B}$ una base del grupo topológico G y H un subgrupo de G. Para cada $U \in \mathcal{B}$ definamos $U^* = \{Hx : x \in U\}$ y $\mathcal{B}^* = \{U^* : U \in \mathcal{B}\}$.

PROPOSICIÓN 1.4.7. *Para todo subgrupo H de G, $\mathcal{B}^*$ es una base para una topología en G/H. Si H es cerrado, la topología es T_1.*

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos que se satisfacen las condiciones que caracterizan a una base.

Si U^*, $V^* \in \mathcal{B}^*$ y $Ha \in U^* \cap V^*$, debemos encontrar $W \in \mathcal{B}$ tal que $Ha \in W^* \subseteq U^* \cap V^*$. Como $Ha \in U^* \cap V^*$. Existen $x \in U$, $y \in V$ tales que $a \in Hx \cap Hy$. Pero entonces $Ha = Hx = Hy$, de donde $Ha \subseteq HU$ y $Ha \subseteq HV$, es decir $Ha \subseteq HU \cap HV$. Además, $HU \cap HV$

es un abierto de G que contiene a x; así podemos tomar $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq HU \cap HV$. Claramente $Ha = Hx \in W^*$. Para terminar, sea $Hw \in W^*$, con $w \in W$ un elemento arbitrario. Podemos escribir $w = h_1 u_1 = h_2 v_2$ para ciertos elementos $h_1, h_2 \in H$ y $u_1 \in U, v_1 \in V$. Se tiene que $Hw = Hh_1 u_1 = Hu_1 \in U^*$, $Hw = Hh_2 v_1 = Hv_1 \in V^*$, lo que prueba que $Hw \in U^* \cap V^*$ para cualquier elemento Hw de W^*, es decir, $W^* \subseteq U^* \cap V^*$.

Sea $Hx \in G/H$. Como $\mathcal{B}$ es base para G, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ y se tiene que $Hx \in U^*$. Así que la familia $\mathcal{B}$ cubre a G/H.

Por último, comprobemos que la topología obtenida es T_1. Sean $Ha \neq Hb$ dos elementos arbitrarios de G/H. Como Ha es cerrado y $b \notin Ha$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $b \in U$ y $U \cap Ha = \varnothing$; entonces $Hb \in U^*$ y $Ha \notin U^*$. Así concluimos que el espacio es T_1. □

El espacio topológico G/H así construido recibe el nombre de *espacio cociente* de G entre H, o *grupo cociente* de G entre H, si H es cerrado y algebraicamente normal.

A continuación estudiaremos las propiedades de la función canónica $\pi\colon G \to G/H$, que asigna a cada $x \in G$ la clase lateral Hx.

PROPOSICIÓN 1.4.8. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y $\pi\colon G \to G/H$ la función canónica dada por $\pi(x) = Hx$ para todo $x \in G$. Entonces π es continua y abierta.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in G$ y U un abierto en G tales que $Hx = \pi(x)$ pertenece a $U^* = \{Hy : y \in U\}$. Para probar la continuidad de π debemos encontrar un abierto $V \ni x$ en G tal que $\pi(V) \subseteq U^*$. De hecho, el conjunto $V = HU$ es un abierto en G y $x \in V$; además $\pi(V) = \pi(HU) = \pi(U) = U^*$ y, por lo tanto, π es continua.

Sean U un abierto en G y $\mathcal{B}$ una base para la topología de G; entonces $U = \bigcup_{j\in J} B_j$, donde $B_j \in \mathcal{B}$. Tenemos que $\pi(U) = \pi(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} \pi(B_j) = \bigcup_{j\in J} B_j^*$, y por tanto, $\pi(U)$ es un abierto. □

En general la función canónica $\pi\colon G \to G/H$ no es cerrada, como lo muestra el siguiente ejemplo. Sin embargo, si H es compacto entonces π resulta ser cerrada.

EJEMPLO 1.4.9. Considere $G = \mathbb{R}$, el conjunto de los números reales con la suma y topología usuales, y $H = \mathbb{Z}$ el subgrupo de los enteros. Para visualizar $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z} + x : x \in \mathbb{R}\}$, definimos la función $\psi\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [0,1)$ como $\psi(\mathbb{Z} + x) = x - [x]$, donde $[x]$ denota la función parte entera de x. Es fácil ver que ψ es biyectiva y que es un homomorfismo si le damos a $[0,1)$ la topología que hereda de $\mathbb{R}$.

El conjunto $A = \{1 + \frac{1}{1}, 2 + \frac{1}{2}, \dots, n + \frac{1}{n}, \dots\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ pero $\psi(A) = \{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ no es cerrado en $[0,1)$.

El resultado siguiente nos muestra que las propiedades topológicas locales del espacio cociente de G entre H también se pueden estudiar en un solo punto.

PROPOSICIÓN 1.4.10. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G; entonces G/H es un espacio homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN. Para $a \in G$ fijo, la función $\psi_a \colon G/H \to G/H$ definida por $\psi_a(Hx) = H(xa)$, $Hx \in G/H$ es un homeomorfismo. Es inmediato ver que ψ_a está bien definida y que es uno a uno y suprayectiva. Además, $(\psi_a)^{-1} = \psi_{a^{-1}}$, por lo que basta probar que ψ_a es abierta. Sea $\pi \colon G \to G/H$ la función canónica y sea $U^* = \pi(U)$ un abierto de G/H, donde U es un abierto de G. Entonces $\psi_a(U^*) = \pi(Ua)$ es un conjunto abierto ya que Ua es abierto en G. Por tanto, ψ_a es abierta y así ψ_a es un homeomorfismo. Para terminar, basta observar que dadas $Hx, Hy \in G/H$, el homeomorfismo $\psi_{a^{-1}b}$ satisface $\psi_{a^{-1}b}(Ha) = Hb$. □

El siguiente resultado es un lema auxiliar que nos permitirá establecer dos propiedades topológicas del espacio cociente G/H.

LEMA 1.4.11. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y U, V vecindades abiertas de e_G en G tales que $VV^{-1} \subseteq U$; entonces, si $\pi \colon G \to G/H$ es la función canónica, se cumple que $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Hx \in \overline{\pi(V)}$ para un elemento $x \in G$; entonces $\pi(xV)$ es una vecindad abierta que contiene a Hx y por lo tanto interseca a $\pi(V)$, por lo que existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $Hxv_1 = Hv_2$, esto es $Hx = Hv_2v_1^{-1} \in \pi(VV^{-1}) \subseteq \pi(U)$. □

TEOREMA 1.4.12. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces*

1. *G/H es un espacio regular y por tanto de Hausdorff.*
2. *G/H es un espacio discreto si y sólo si H es abierto en G.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Por hipótesis, H es cerrado en G. Entonces Ha es cerrado en G para todo $a \in G$ y $(G/H) \setminus \{Ha\} = \{Hx : Hx \neq Ha\} = \pi(G \setminus Ha)$ es abierto en G/H, lo cual quiere decir que el complemento de cada punto Ha en G/H es abierto y por tanto cada punto Ha es cerrado en G/H y G/H es en consecuencia un espacio T_1. Para demostrar que el espacio es regular, es suficiente probar que para todo abierto U^* en G/H que contenga a H, existe un abierto V^* en G/H también conteniendo a H tal que $\overline{V^*} \subseteq U^*$. Sea $U^* = \pi(U)$ para U alguna vecindad abierta en G, con $e_G \in U$; entonces existe un abierto $V \subseteq G$ con $e_G \in V$ y tal que $VV^{-1} \subseteq U$. Del lema 1.4.11 se deduce que $H \in \overline{V^*} = \overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U) = U^*$.

2) Si G/H es discreto, entonces $\{H\} = \{He_G\}$ es abierto en G/H y como la función canónica $\pi \colon G \to G/H$ es continua, $\pi^{-1}(\{H\}) = H$

es abierto en G. Recíprocamente, si H es abierto en G, entonces Ha es abierto en G para todo $a \in G$ y $\{Ha\} = \pi(Ha)$ es abierto en G/H, ya que por la proposición 1.4.8 π es abierta. □

En el caso particular en el que el subgrupo N de G es normal, de modo que G/N es un grupo, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.4.13. *Sean G un grupo topológico y N un subgrupo normal y cerrado de G; entonces*

1. *G/N con la topología cociente es un grupo topológico;*
2. *la función canónica $\pi\colon G \to G/N$ es un homomorfismo abierto y continuo;*
3. *el grupo G/N es un espacio T_1 y por tanto regular.*
4. *el grupo G/N es discreto si y sólo si N es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Es suficiente probar que la operación $(A, B) \to AB^{-1}$, $(A, B \in G/N)$ es continua. Sean $A = Na$, $B = Nb \in G/N$ y W^* una vecindad abierta de $C = Na(Nb)^{-1} = Nab^{-1}$, y digamos que $W^* = \pi(W)$, donde W es un abierto de G que contiene a ab^{-1}. Por la continuidad de la operación $(a, b) \to ab^{-1}$ en G, existen abiertos U, V en G tales que $a \in U$, $b \in V$, $UV^{-1} \subseteq W$. Entonces $Na \in U^*$, $Nb \in V^*$ y para todos los $x \in U, y \in V$ ocurre $Nx(Ny)^{-1} = Nxy^{-1} \in W^*$ ya que $xy^{-1} \in UV^{-1} \subseteq W$, es decir, $U^*(V^*)^{-1} \subseteq W^*$, lo cual implica que las operaciones del grupo G/N son continuas.

2) Se deduce de la proposición 1.4.8 y de que $\pi(ab) = Nab = (Na)(Nb) = \pi(a)\pi(b)$ para cualesquier elementos a, b de G.

3) Se deduce del teorema 1.4.12.

4) Es consecuencia del inciso (2) del teorema 1.4.12. □

El primer teorema de isomorfismo para grupos toma la siguiente forma en grupos topológicos.

TEOREMA 1.4.14. *Sean G y G' dos grupos topológicos y sea f un epimorfismo continuo y abierto de G en G' con núcleo N. Entonces N es un subgrupo normal y cerrado de G y el isomorfismo h de G/N en G' dado por $h(Nx) = f(x)$ es un isomorfismo topológico entre G/N y G'.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto N es un subgrupo normal de G porque es el núcleo del homomorfismo f. Además, N es cerrado por ser la imagen inversa de la identidad e' de G', que es cerrada, bajo una función continua.

Sea π el homomorfismo canónico de G en G/N. Conviene notar que h se ha definido de tal manera que $f = h \circ \pi$. Sea V un abierto en G'. Es fácil ver que $h^{-1}(V) = \pi(f^{-1}(V))$. En efecto, $f^{-1}(V) = (h \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(h^{-1}(V))$, de donde $h^{-1}(V) = \pi(f^{-1}(V))$.

Como π es una función abierta, tenemos que $h^{-1}(V) = \pi(f^{-1}(V))$ es un conjunto abierto. Con ello probamos que h es continua.

Sea U un abierto en G/N. Entonces, por la definición de abierto en G/N, existe un abierto W en G tal que $U = \pi(W)$. En consecuencia, $h(U) = h(\pi(W) = f(W)$. Como f es una función abierta, tenemos que $h(U)$ es un conjunto abierto. Esto demuestra que h es una función abierta, y con lo demostrado en los párrafos anteriores tenemos que h es un isomorfismo topológico. □

Observe que una condición necesaria y suficiente para que un epimorfismo f sea un isomorfismo es que el núcleo sea la identidad.

La siguiente disertación tiene como propósito establecer una correspondencia como la que existe entre los subgrupos normales de los grupos dominio e imagen de un homomorfismo para el caso de un homomorfismo continuo que tiene como dominio e imagen a grupos topológicos. Con el fin de hacer útil esta relación, debemos sustituir a los grupos normales con grupos normales cerrados, y el homomorfismo, además de ser continuo, debe ser abierto.

Sea $f\colon G \to G'$ un epimorfismo continuo y abierto, donde G y G' son grupos topológicos. Denotemos con N al núcleo de f. Entonces f establece una correspondencia biyectiva entre los subgrupos cerrados de G' y los subgrupos cerrados de G que contienen a N. En efecto, si K es un subgrupo cerrado de G', entonces el subgrupo H de G que le corresponde es justo la imagen inversa $H = f^{-1}(K)$. Si H es un subgrupo cerrado de G, que contiene a N, entonces el subgrupo de G' que le corresponde es su imagen, $K = f(H)$. Podemos demostrar que este subgrupo K de G es cerrado. En efecto, si $y \in G'$ es un punto de acumulación de K, entonces, como f es un epimorfismo, existe $x \in G$ tal que $f(x) = y$. Si U es una vecindad de x, por ser f abierto y continuo, existe una vecindad V de y tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$, pero como $V \cap K \neq \varnothing$, tenemos que $U \cap H \neq \varnothing$. Por lo tanto, x es punto de acumulación de H y, por ello $x \in H$. De aquí $y \in K$, es decir, K es cerrado. Las correspondencias así definidas son inversas una de la otra. Por último, si $H \subseteq G$ y $K \subseteq G'$ son dos subgrupos cerrados y normales, $N \subseteq H$ y $f(H) = K$, entonces tenemos que $G/H \cong G'/K$.

En efecto, suponga primero que K es un subgrupo cerrado y normal de G' y que $H = f^{-1}(K)$. Entonces H es cerrado y contiene a N. Además, H es un subgrupo normal de G. Si π denota la proyección canónica de G' en el grupo cociente G'/K, entonces $h = \pi \circ f$ es un epimorfismo abierto de G en G'/K cuyo núcleo es H. Del teorema 1.4.14 se deduce que H es un subgrupo normal de G y los grupos cocientes G/H y G'/K son isomorfos. Por otro lado, si H es un subgrupo cerrado y normal de G que contiene a N y $K = f(H)$, entonces, por ser f un epimorfismo,

$H = f^{-1}(f(K))$; de esto, a su vez, se deduce que $f(G \setminus H) = G' \setminus K$. Como f es abierta y $G \setminus H$ es un conjunto abierto, tenemos que $G' \setminus K$ también es abierto y K es cerrado. Se observa que K es normal.

Ahora construiremos el grupo del círculo $\mathbb{T}$, de gran importancia en análisis y variable compleja. Por supuesto, también encuentra gran aplicación en la teoría de grupos topológicos.

El *grupo del círculo* se define como:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Observe que como $\mathbb{Z}$ es un subgrupo cerrado y normal de $\mathbb{R}$ (pues $\mathbb{R}$ es abeliano), entonces $\mathbb{T}$ es un grupo topológico. Dadas dos clases de equivalencia $x + \mathbb{Z}$ y $y + \mathbb{Z}$, éstas son iguales si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, en cada clase $y + \mathbb{Z}$ existe un representante $x \in y + \mathbb{Z}$ con $x \in [0, 1]$. Considere la *circunferencia unitaria* S^1 en el plano complejo $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definida como $S^1 = \{e^{2\pi i x} : x \in [0, 1]\}$ y la función $f \colon \mathbb{R} \to S^1$ dada por $f(x) = e^{2\pi i x}$. Si z es un entero, claramente $f(x + z) = f(x)$, por lo que f es constante en cada clase de equivalencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$.

Para ver que $\mathbb{T}$ es isomorfo topológicamente a S^1, consideremos el homomorfismo canónico $\pi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dado por $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$ y la función $\phi \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ dada como $\phi(x + \mathbb{Z}) = f(x) = e^{2\pi i x}$. La función ϕ está bien definida puesto que f es constante en cada clase de equivalencia de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Tenemos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\phi"] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

en el cual π y f son homomorfismos continuos abiertos, por lo que ϕ también es un homomorfismo continuo (y abierto). Sin embargo, ϕ es una biyección ya que si $\phi(x + \mathbb{Z}) = \phi(y + \mathbb{Z})$ entonces $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y}$ y $e^{2\pi i(x-y)} = 1$. Además, es un hecho conocido de variable compleja que esto último ocurre si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$, es decir, tenemos que $x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}$, y ϕ es una biyección. Además como $\pi([0, 1]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $[0, 1]$ es compacto, también $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ lo es. Hemos probado entonces que el grupo del círculo $\mathbb{T}$ es compacto.

1.5. Productos directos

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos. Damos una estructura de grupo al conjunto $G = \prod_{i \in I} G_i$ definiendo $(x_i)_{i \in I}(y_i)_{i \in I} = (x_i y_i)_{i \in I}$. Si e_i es el elemento identidad de G_i, entonces $e = (e_i)_{i \in I}$ es el elemento identidad de G, y tenemos $(x_i)_{i \in I}^{-1} = (x_i^{-1})_{i \in I}$. La topología producto es compatible con esta estructura de grupo porque la función $h \colon G \times G \to G$ dada por $h((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = (x_i y_i^{-1})_{i \in I}$ es la composición de las funciones $((x_i, y_i)_{i \in I}) \to (x_i y_i^{-1})_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I}(G_i \times G_i)$ en G y la proyección $((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \to ((x_i, y_i)_{i\in I})$ de $G \times G$ en $\prod_{i\in I}(G_i \times G_i)$, y estas dos funciones son continuas.

El producto directo de los grupos topológicos $\{G_i : i \in I\}$ se obtiene al dar al producto

$$G = \prod_{i\in I} G_i$$

la topología producto.

La demostración de la siguiente afirmación se omite (ver [HR]): Si $\{I_x\}_{x\in K}$ es una partición de I, entonces G es isomorfo al producto de los grupos topológicos $\prod_{i\in I_x} G_i$, es decir

$$G = \prod_{i\in I} G_i \equiv \prod_{x\in K} \prod_{i\in I_x} G_i$$

(propiedad asociativa del producto).

La proyección natural $\pi_j \colon G \to G_j$ con $j \in I$ definida por $\pi_j(x) = x_j$ para todo $x = (x_i)_{i\in I} \in G$ es un homomorfismo continuo. Este último hecho se deduce directamente de la definición de la topología producto. Más aún, la función $\phi_j \colon G_j \to G$ definida por $\phi_j(x) = (y_i)_{i\in I}$, donde $y_i = e_i$ para $i \neq j$ y $y_j = x_j$, es un isomorfismo topológico entre G_j y $N_j = \phi_j(G_j)$. Es decir, ϕ_j es una inmersión de G_j en G.

El siguiente teorema es una consecuencia sencilla de las definiciones de productos de grupos y de espacios topológicos.

Teorema 1.5.1. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos y sea H el subconjunto de $G = \prod_{i\in I} G_i$ que consta de todos los $x = (x_i)_{i\in I}$ tales que x_i es el elemento identidad de G_i para todo i excepto para un número finito de índices; H es entonces un subgrupo normal denso en G.*

El objetivo de esta disertación es determinar bajo qué condiciones se puede agregar la parte topológica al concepto de descomposición algebraica de un grupo en subgrupos. Sea $\{G_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de grupos topológicos y G su producto directo. Es fácil ver que para vecindades arbitrarias $U_1, \dots, U_n$ de $e_1, \dots, e_n$ relativas a $G_1, \dots, G_n$, respectivamente, el producto $U_1 \times \cdots \times U_n$ es una vecindad de e_G en la topología del grupo G. Por todo esto, podemos plantear una definición de producto interno de grupos topológicos.

Sea G un grupo topológico y sean $N_1, \dots, N_n$ subgrupos cerrados normales de G. Diremos que el grupo topológico G se descompone topológicamente en el producto directo de los subgrupos $N_1, \dots, N_n$ si G se descompone (en el sentido algebraico) en el producto directo de estos subgrupos y, además, para cualquier colección $U_1, \dots, U_n$ de vecindades de la identidad, e, relativas a $N_1, \dots, N_n$, existe una vecindad de e relativa a todo el grupo G tal que $U \subseteq U_1 \cdot \cdots \cdot U_n$.

PROPOSICIÓN 1.5.2. *Supongamos que el grupo topológico G se descompone topológicamente en el producto directo de los subgrupos $N_1, \ldots, N_n$, y sea H el producto directo de estos subgrupos. A cada elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$ le asociamos el elemento $\psi(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in G$. Entonces ψ es un isomorfismo topológico entre G y H. Además, $\psi \circ \phi_j = \mathrm{id}_{N_j}$, donde las ϕ_j se definieron en el párrafo anterior al teorema 1.5.1.*

DEMOSTRACIÓN. Como ya se conocen las partes algebraicas de esta proposición y es evidente que $\psi \circ \phi_j = \mathrm{id}_{N_j}$, terminaremos si probamos que ψ es una función continua y abierta. Sea U una vecindad arbitraria de la identidad en G y V otra tal que $V^n \subseteq U$. Definimos $V_i = V \cap N_i$ para todo $i \leq n$, y entonces $V' = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}$ es una vecindad de la identidad en H. Es fácil ver que $\psi(V') \subseteq U$. Esto último demuestra que ψ es continua. Por otro lado, si W es una vecindad de la identidad en H, entonces contiene un conjunto de la forma $V_1 \times \cdots \times V_n$, donde cada V_i es una vecindad de la identidad en N_i. Por hipótesis, existe una vecindad U de la identidad en G tal que $U \subseteq V_1 \cdot \ldots \cdot V_n = \psi(V)$, de donde se deduce que ψ es abierta. □

EJEMPLO 1.5.3. Denote con D al grupo discreto de dos elementos $\{0, 1\}$. Sea D^τ el producto topológico de τ copias de D. Entonces D^τ es un grupo topológico compacto de dimensión cero. Observe que $a^2 = e$, para todo elemento a de D^τ. Así, cada elemento de D^τ es su propio inverso. Tales grupos se llaman *booleanos.*

1.6. Cardinales invariantes elementales

Ahora estudiaremos algunas propiedades de las funciones cardinales definidas en grupos. La primera propiedad, respecto a las funciones cardinales, que encuentra una expresión muy especial en el caso de grupos topológicos se describe en el corolario 1.6.3.

LEMA 1.6.1. *Sea G un grupo topológico. Suponga que D es un subespacio denso en G y que U es una vecindad de la identidad e_G; entonces $G = DU$.*

DEMOSTRACIÓN. La inclusión $DU \subseteq G$ es obvia, así es que probaremos que $G \subseteq DU$. Sea $g \in G$. Dado que D es denso y gU^{-1} es abierto no vacío, existe $x \in D \cap gU^{-1}$. Por lo tanto, $g \in xU \subseteq DU$. Al ser g un elemento arbitrario de G concluimos que $G \subseteq D \cdot U$. □

TEOREMA 1.6.2. *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base local para e_G. Suponga que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $D_B \subseteq G$ tal que $G = D_B B$. Entonces $\{xB : x \in D_B, B \in \mathcal{B}\}$ es una base para G.*

DEMOSTRACIÓN. Sea g en G y U un abierto que contiene a g. Existe V vecindad de la identidad tal que $gV \subseteq U$. Considere una vecindad W de e_G tal que $W^{-1}W \subseteq V$, y un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq W$. Como $G = D_B B$, existe $x \in D_B$ tal que $g \in xB$. Por consiguiente, $g \in xB \subseteq gB^{-1}B \subseteq gW^{-1}W \subseteq gV \subseteq U$, como se requiere. □

COROLARIO 1.6.3. *Si G es un grupo topológico, entonces $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que $d(G) \leq w(G)$ y que $\chi(G) \leq w(G)$; por lo tanto, $d(G) \cdot \chi(G) \leq w(G)$. Para la otra desigualdad considere un subconjunto denso D en G de cardinalidad $d(G)$. Sea $\mathcal{B}$ una base local para e_G tal que $|\mathcal{B}| = \chi(G)$. Por el lema 1.6.1 sabemos que $G = BD$ para cada $B \in \mathcal{B}$, y del teorema 1.6.2 se deduce que $\mathcal{V} = \{xB : x \in D, B \in \mathcal{B}\}$ es una base para G de cardinalidad no mayor que $\chi(G) \cdot d(G)$. Por consiguiente, $w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G)$. □

TEOREMA 1.6.4. *Sea G un grupo topológico. Entonces*

(1) $\pi\chi(G) = \chi(G)$;
(2) $\pi w(G) = w(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Para evitar situaciones obvias, supondremos que G no es discreto.

1) Como la desigualdad $\pi\chi(G) \leq \chi(G)$ es inmediata, basta probar que si $\mathcal{B}$ es una π-base local en e_G, entonces $\{BB^{-1} : B \in \mathcal{B}\}$ es una base local en e_G. Con U como una vecindad de e_G, encontramos otra vecindad V de e_G y $B \in \mathcal{B}$ tales que $B \subseteq V \subseteq VV^{-1} \subseteq U$. Entonces el conjunto BB^{-1} es abierto y $e_G \in BB^{-1} \subseteq U$, como se requiere.

2) De (1) y el corolario 1.6.3 se deduce que

$$\begin{aligned} w(G) &\leq d(G) \cdot \chi(G) \leq \pi w(G) \cdot \pi\chi(G) \\ &\leq \pi w(G) \cdot \pi w(G) = \pi w(G). \end{aligned}$$ □

Antes de continuar presentamos una desigualdad cardinal muy importante, válida en cualquier grupo topológico.

PROPOSICIÓN 1.6.5. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal cerrado de G. Entonces $w(H) \leq w(G)$ y $w(G/H) \leq w(G)$. Además, $\chi(G/H) \leq \chi(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad $w(H) \leq w(G)$ es evidente. Para probar que $w(G/H) \leq w(G)$ note que si U es abierto en G, entonces $U^* = \pi(U)$ es abierto en G/H, donde π es el homomorfismo canónico $\pi\colon G \to G/H$. Además, si $\mathcal{B}$ es una base para G, $\pi(\mathcal{B}) = \{\pi(U) : U \in \mathcal{B}\}$ es una base para G/H. Así, $w(G/H) \leq w(G)$. La desigualdad $\chi(G/H) \leq \chi(G)$ se prueba de la misma forma. □

Ahora demostremos un resultado un poco sorprendente, el cual es válido sólo en grupos topológicos.

TEOREMA 1.6.6. *Sea G un grupo tal que $d(G) < |G|$. Entonces* $\Delta(G) = |G|$.

DEMOSTRACIÓN. Sea D' un conjunto denso en G de cardinalidad $d(G)$. Considere $D = \langle D' \rangle$. Entonces $|D| = d(G)$. Sea $D_0 = D$ y considere $g_1 \in G \setminus D$. Definimos $D_1 = g_1 D_0$, que resulta denso y ajeno a D_0. Supongamos que hemos construido de esta forma conjuntos densos D_α para toda $\alpha < \beta$, $\beta < |G|$. Sea $g_\beta \in G \setminus (\bigcup_{\alpha<\beta} D_\alpha)$. Podemos encontrar tal g_β pues

$$\left| \bigcup_{\alpha<\beta} D_\alpha \right| \leq \sum_{\alpha<\beta} |D_\alpha| \leq \beta \cdot |D| < |G|$$

siempre que $\beta < |G|$. Continuando este proceso logramos $|G|$ densos ajenos entre sí. Cada denso debe intersectar a todo abierto no vacío, y por lo tanto cada abierto debe tener cardinalidad $|G|$; en consecuencia, $\Delta(G) = |G|$. □

Capítulo 2

Compacidad

Los conceptos de compacidad y compacidad local son de particular importancia en grupos topológicos. En grupos localmente compactos podemos definir una teoría de la medida, (vea [**49**]). Además, en esta clase de grupos se desarrolla la teoría de dualidad de Pontryagin-Van Kampen, de gran importancia en análisis. En esta parte se establecen los hechos fundamentales que permiten abordar estas dos teorías.

Los grupos compactos y localmente compactos en muchos sentidos se han caracterizado casi completamente. Se conoce su estructura algebraica y topológica y muchos de sus invariantes cardinales.

La primero estudiaremos las principales propiedades de los grupos compactos y localmente compactos. En ella también se encuentran resultados sobre grupos numerablemente compactos. En la segunda sección se analizan grupos con propiedades relacionadas a la compacidad tales como acotación total, ser generado por un subconjunto compacto, etc. A continuación, se establecen las principales desigualdades cardinales para grupos compactos o con propiedades relacionadas a la compacidad. Por último, se presenta una breve introducción a la teoría de dualidad.

2.1. Grupos compactos y localmente compactos

TEOREMA 2.1.1. *Sean G un grupo topológico, U una vecindad de e_G y F un subconjunto compacto de G. Entonces existe una vecindad V de e_G tal que $xVx^{-1} \subseteq U$ para toda $x \in F$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea W una vecindad simétrica de e_G tal que $W^3 \subseteq U$. Como $F \subseteq \bigcup_{x\in F} Wx$ y F es compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{k=1}^n Wx_k$. Sea $V = \bigcap_{k=1}^n x_k^{-1}Wx_k$. Es claro que V es una vecindad de e_G y $x_kVx_k^{-1} \subseteq W$ para $k = 1, \dots, n$. Si $x \in F$, entonces $x \in Wx_k$ para cierta $k \leq n$. Así, $x = wx_k$ para algún $w \in W$, y de aquí

$$xVx^{-1} = wx_kVx_k^{-1}w^{-1} \subseteq wWw^{-1} \subseteq W^3 \subseteq U. \qquad \square$$

Sabemos que si G es un grupo topológico y H es uno de sus subgrupos cerrados, entonces la función canónica $\pi \colon G \to G/H$ es continua y abierta. Para H compacto, podemos mejorar este resultado:

TEOREMA 2.1.2. *Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo compacto de G, entonces la función canónica π de G a G/H es una función cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Suponiendo que A es cerrado en G, probaremos que el complemento de $\pi(A)$ es abierto en G/H. Considere $x \in G$ tal que $\pi(x) \notin \pi(A)$. Entonces $x \notin AH$. Dado que AH es cerrado, existe una vecindad U de x tal que $U \cap (AH) = \varnothing$. Por definición, $\pi(U)$ es un abierto en G/H que contiene a $\pi(x)$ y es ajeno a $\pi(A)$. Suponga lo contrario y tome $z \in \pi(U) \cap \pi(A)$, es decir $z = \pi(a) = \pi(u)$ para ciertos $a \in A$ y $u \in U$. Por lo tanto, $a^{-1}u \in H$ y $u \in AH$, una contradicción. Ya que xH fue un elemento arbitrario de $G/H \setminus \pi(A)$ concluimos que $G/H \setminus \pi(A)$ es abierto. □

La compacidad y la compacidad local de grupos se hereda a espacios cocientes de G entre subgrupos cerrados H:

TEOREMA 2.1.3. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Si G es compacto, entonces H y G/H también lo son. Si G es localmente compacto, entonces H y G/H también lo son.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la compacidad y la compacidad local se hereda a subgrupos cerrados.

Dado que la función canónica $\pi\colon G \to G/H$ es continua y sobre, si G es compacto, entonces G/H también lo es.

Ahora probaremos que si G es localmente compacto, el espacio G/H es localmente compacto. Sea $\pi(a) \in G/H$. Debemos encontrar una vecindad compacta de $\pi(a)$ en G/H. Sea U una vecindad de a cuya cerradura $\overline{U}$ en G es compacta. Entonces $\pi(\overline{U})$ es compacto y por lo tanto cerrado. Como $U \subseteq \overline{U}$, $\overline{\pi(U)} \subseteq \pi(\overline{U})$ por lo que $\overline{\pi(U)}$ es compacta. Note que $\pi(U)$ es una vecindad abierta de $\pi(a)$ en G/H, lo que termina la demostración. □

Hemos usado el hecho de que si $\pi\colon G \to G/H$ es la función canónica y $K \subseteq G$ es compacto, entonces $\pi(K)$ también es compacto. El recíproco de este resultado también es cierto con una hipótesis adicional: la imagen inversa de un compacto en el espacio cociente G/H es compacta si H es compacto. Antes de probar este resultado necesitamos algunos hechos auxiliares. Recuerde que una función continua $f\colon X \to Y$ se llama *perfecta* (X, Y espacios topológicos) si f es cerrada y todas las fibras $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ son compactas en X.

Podemos generalizar el teorema 2.1.2 al afirmar que la función canónica $\pi\colon G \to G/H$ es perfecta si el subgrupo H de G es compacto.

PROPOSICIÓN 2.1.4. *Si $f\colon X \to Y$ es una función cerrada, entonces para cualquier subespacio $L \subseteq Y$ la restricción $f_L = f \restriction f^{-1}(L)\colon f^{-1}(L) \to L$ es cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado en X, entonces

$$f_L(A \cap f^{-1}(L)) = f(A \cap f^{-1}(L)) = f(A) \cap L,$$

y como f es cerrada, $f(A)$ es cerrada en Y y así $f(A) \cap L$ es cerrada en L. □

De la proposición 2.1.4 y de la definición de función perfecta se deduce fácilmente el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.1.5. *Si $f\colon X \to Y$ es una función perfecta, entonces para cualquier cerrado $A \subseteq X$ y cualquier subespacio $B \subseteq Y$ las restricciones $f \restriction A\colon A \to Y$ y $f_B = f \restriction f^{-1}(B)\colon f^{-1}(B) \to B$ son perfectas.*

TEOREMA 2.1.6. *Si $f\colon X \to Y$ es una función perfecta, entonces para todo subconjunto compacto $Z \subseteq Y$, su imagen inversa $f^{-1}(Z)$ es compacta en X. En particular, si Y es compacto, X también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que si $y \in Y$ y U es una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$, entonces existe una vecindad W de y tal que $f^{-1}(W) \subseteq U$: definimos $W = Y \setminus f(X \setminus U)$. Claramente $y \in W$ y W es abierto por ser f cerrada. Por lo tanto, $f^{-1}(W) \subseteq U$.

De acuerdo con la proposición 2.1.5, es suficiente probar que si Y es compacto, entonces X también lo es. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{U}$ es cerrada respecto a uniones finitas. Sabemos que para toda $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto en X y que existe $U_y \in \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}(y) \subseteq U_y$; por consiguiente, existe un abierto V_y en Y tal que $y \in V_y$ y $f^{-1}(V_y) \subseteq U_y$. Puesto que Y es compacto, la familia $\{V_y : y \in Y\}$ contiene una subcubierta finita $\{V_y : y \in Y'\}$, entonces la subfamilia finita $\{U_y : y \in Y'\}$ de $\mathcal{U}$ es una cubierta de X. □

Suponga que tenemos un grupo G, un subgrupo H de G y una propiedad topológica $\mathcal{P}$. Un problema muy conocido en la teoría de grupos topológicos es: si G/H y H tienen $\mathcal{P}$, ¿también G posee $\mathcal{P}$? En este libro responderemos afirmativamente esta pregunta para varias propiedades $\mathcal{P}$, por ejemplo conexidad, compacidad, etc. Comencemos con la compacidad.

TEOREMA 2.1.7. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G. Si $Q \subseteq G/H$ es compacto, entonces $P = \pi^{-1}(Q)$ es compacto, donde $\pi\colon G \to G/H$ es la función canónica. En particular, si G/H es compacto, G también lo es.*

Demostración. Basta probar que π es perfecta. Del teorema 2.1.2 se deduce que π es cerrada.

Si $x \in G$, entonces $\pi^{-1}(\pi(x)) = xH$ que es compacto. Así es que π es perfecta y la compacidad de $\pi^{-1}(Q)$ se deduce del teorema 2.1.6. $\square$

Del teorema 2.1.7 se desprende que la función canónica $\pi\colon G \to G/H$ es perfecta si y sólo si H es compacto en G.

Existen grupos numerables sin puntos aislados, por ejemplo el grupo $\mathbb{Z}$ con la p-topología (véase el Ejemplo 2 de la Sección 2 del Capítulo 1). Demostraremos que tales grupos no pueden ser localmente compactos.

Teorema 2.1.8. *Todo grupo topológico localmente compacto G tal que $|G| < \mathfrak{c}$ es discreto.*

Demostración. Suponga que G es localmente compacto y no discreto. Entonces G no tiene puntos aislados por ser homogéneo. Sea U una vecindad abierta de e_G tal que $K = \overline{U}$ es compacto. Tanto U como K carecen de puntos aislados. Si aplicamos el teorema de Čech-Pospíšil a K, dado que $\chi(x, K) \geq \aleph_0$ para toda $x \in K$, obtenemos $|G| \geq |K| \geq \mathfrak{c}$, lo que termina la demostración. $\square$

Note que todo grupo compacto G no discreto tiene cardinalidad no menor que $\mathfrak{c}$, lo cual se desprende del teorema 2.1.8.

El siguiente resultado acerca de subconjuntos compactos de un grupo nos será de utilidad posteriormente.

Teorema 2.1.9. *Sean G un grupo topológico, F un subconjunto compacto de G, U un subespacio abierto de G tal que $F \subseteq U$. Entonces existe una vecindad V de e_G tal que $(FV) \cup (VF) \subseteq U$. Si G es localmente compacto, entonces V se puede elegir de tal forma que ambos conjuntos $\overline{FV}$ y $\overline{VF}$ sean compactos.*

Demostración. Para cada $x \in F$, existe una vecindad W_x de e_G tal que $xW_x \subseteq U$ y una vecindad V_x de e_G tal que $V_x^2 \subseteq W_x$. Como $F \subseteq \bigcup_{x \in F} xV_x$, existen $x_1, \ldots, x_n \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} x_k V_{x_k}$. Sea $V_1 = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$. Entonces

$$FV_1 \subseteq \Big(\bigcup_{k=1}^{n} x_k V_{x_k}\Big) V_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} x_k V_{x_k}^2 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} x_k W_{x_k} \subseteq U.$$

De manera similar, existe una vecindad V_2 de e_G tal que $V_2F \subseteq U$. Sea $V = V_1 \cap V_2$, y entonces obtenemos $((FV) \cup (VF)) \subseteq U$. Si G es localmente compacto, entonces V se puede elegir con cerradura compacta. Se deduce que $F\overline{V}$ es cerrado y compacto. Dado que $FV \subseteq F\overline{V}$ y $F\overline{V}$ es cerrado, tenemos $\overline{FV} \subseteq F\overline{V}$ y de aquí $\overline{FV}$ es compacto. En forma semejante, $\overline{VF}$ es compacto, así que $\overline{FV}$ y $\overline{VF}$ son compactos. $\square$

Ahora analicemos algunos resultados sobre compacidad numerable.

TEOREMA 2.1.10. *Si un grupo topológico G contiene un subgrupo compacto H tal que el espacio cociente G/H es numerablemente compacto, entonces G es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Queremos probar que G es numerablemente compacto, es decir que cada subconjunto infinito de G tiene un punto de acumulación. Sea $X \subseteq G$ con $|X| = \aleph_0$. Si para algún $g \in G$ tenemos $|X \cap gH| = \aleph_0$, entonces X tiene un punto de acumulación en el subespacio compacto gH. Supongamos entonces que para cada $g \in G$ tenemos $|X \cap gH| < \aleph_0$. Sea $\pi\colon G \to G/H$ la función canónica. De nuestra suposición se desprende que $|\pi(X)| = \aleph_0$ y por consiguiente $\pi(X)$ tiene un punto de acumulación, es decir, existe $a \in G$ tal que cada vecindad U de aH en G/H satisface $|\pi(X) \cap U| = \aleph_0$. Mostraremos que en tal caso alguna $p \in aH$ es punto de acumulación de X. Si no ocurriese así, entonces para cada $p \in aH$ se tendría una vecindad abierta V_p de p en G tal que $|X \cap V_p| < \aleph_0$. Puesto que aH es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq aH$ tal que $aH \subseteq \bigcup_{x \in F} V_p$. De aquí se deduce que $V = \bigcup_{x \in F} V_p$ es una vecindad abierta de aH con $|X \cap V| < \aleph_0$. Al ser perfecta la función $\pi\colon G \to G/H$ (véase comentario siguiente al Teorema 2.1.7), existe una vecindad abierta U de aH en G/H tal que $\pi^{-1}(U) \subseteq V$. Entonces $|U \cap \pi(X)| < \aleph_0$, que contradice la elección del punto $a \in G$. □

En el teorema 2.1.10 no se puede debilitar la hipótesis sobre H a compacidad numerable sin perder el resultado como lo muestra la siguiente observación. Existen dos grupos numerablemente compactos H y K cuyo producto $G = H \times K$ no es numerablemente compacto [vD1] y [HvM]. Las construcciones de tales grupos utilizan axiomas adicionales a ZFE, por ejemplo la hipótesis del continuo o el axioma de Martin.

Es natural preguntarse si existen grupos numerablemente compactos no compactos. La respuesta nos la da el siguiente ejemplo, en el que utilizamos un Σ-producto, cuya definición se encuentra en el apéndice B (Definición B.37):

EJEMPLO 2.1.11. Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia de grupos compactos con $|G_i| > 1$ para todo $i \in I$, donde $|I| > \aleph_0$. En el producto $G = \prod_{i \in I} G_i$ considere el Σ-producto G^* con la identidad e_G como punto base. Es inmediato que G^* es un subgrupo propio denso de G, y por lo tanto no puede ser compacto. Ahora probaremos que G^* es numerablemente compacto. Considere un subconjunto infinito numerable $F \subseteq G^*$. Debemos mostrar que F tiene un punto de acumulación en G^*. Sea $H = \bigcup\{\mathrm{Supp}(x) : x \in F\}$. Por definición, cada Supp(x), $x \in F$, es numerable así que $|H| \leq \aleph_0$. Observe que el producto $G' = \prod_{i\in H} G_i \times \prod_{j\in I\setminus H}\{e_{G_j}\}$ es compacto y $F \subseteq G'$, por lo que existe $z \in G'$ que es punto de acumulación de F en G'. Sólo resta notar que $z \in G' \subseteq G^*$.

Un subgrupo H de un grupo topológico G es *totalmente denso* en G si para todo subgrupo cerrado N de G, el conjunto $H \cap N$ es denso en N. El subgrupo H es débilmente denso en G si para todo subgrupo normal N de G, el conjunto $H \cap N$ es denso en N.

Un espacio X se llama *precompacto* si la cerradura de cualquier subconjunto numerable $Y \subseteq X$ es compacta.

Note que todo espacio precompacto es numerablemente compacto.

Proposición 2.1.12. *Sean G un grupo compacto, $\varphi: G \to G'$ un homomorfismo continuo de G sobre G', H' un subgrupo de G' y $H = \varphi^{-1}(H')$. Entonces:*

(1) *Si H' es denso en G', entonces H es denso en G.*
(2) *Si H' es totalmente denso en G', entonces H es totalmente denso en G.*
(3) *Si H' es precompacto, entonces H también lo es.*

Demostración. Note que φ es un homomorfismo abierto (véase el Teorema 5.1) y que $\varphi \restriction H$ es abierto: si U es abierto en H y V es un abierto en G tal que $U = H \cap V$, entonces $\varphi(U) = \varphi(V) \cap H'$; por lo tanto, $\varphi(U)$ es abierto en H'. Recuerde que toda función continua de un compacto en un espacio Hausdorff es perfecta.

(1) Queremos demostrar que $H = \varphi^{-1}(H')$ es denso en G. Sea U abierto en G, entonces $\varphi(U)$ es abierto en G' y por consiguiente $\varphi(U) \cap H' \neq \varnothing$, de donde se deduce $U \cap \varphi^{-1}(H) \neq \varnothing$, como se requiere.
(2) Sea K un subgrupo cerrado de G. Entonces $H' \cap \varphi(K)$ es denso en $\varphi(K)$ y se desprende de (1) que el conjunto $\varphi^{-1}(H' \cap \varphi(K))$, que es igual a $H \cap K$, es denso en K.
(3) Sea D un subconjunto numerable de H. Como H' es precompacto, existe un subconjunto compacto $K \subseteq H'$ que contiene a $\varphi(D)$. Entonces D está contenido en $\varphi^{-1}(K)$, que es compacto al ser la imagen inversa de un compacto respecto a una función perfecta.

□

2.2. Propiedades relativas a compacidad

Una clase más amplia que los grupos compactos la constituyen los grupos totalmente acotados.

Un grupo topológico G es *totalmente acotado* si para cada vecindad U de e_G existe un subconjunto $F \subseteq G$ tal que F es finito y $G = F \cdot U$.

Los grupos totalmente acotados tienen una propiedad muy importante: son subgrupos densos de grupos compactos (véase [We]). Además, la propiedad se preserva en subgrupos, bajo homomorfismos continuos y en productos. Observe que los grupos totalmente acotados no pueden contener subgrupos infinitos discretos y que su grado de dispersion es igual a la cardinalidad del grupo.

Note que todo grupo compacto es totalmente acotado: si G es compacto y U es una vecindad de e_G, entonces podemos cubrir a G con los abiertos gU, para toda $g \in G$. De la compacidad obtenemos una subcubierta finita y de aquí el subconjunto finito $F \subseteq G$ tal que $G = F \cdot U$.

PROPOSICIÓN 2.2.1. *Sea G un grupo totalmente acotado. Entonces:*

(1) *Si U es una vecindad arbitraria de e_G, entonces existe $L \subseteq G$ finito tal que $G = U \cdot L$.*
(2) *Cualquier subgrupo K de G es totalmente acotado.*
(3) *Si K es un grupo topológico que es la imagen de G respecto a un homomorfismo continuo, entonces K es totalmente acotado.*
(4) *Si K es un subgrupo denso de un grupo L y K es totalmente acotado, entonces L también es totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea U una vecindad arbitraria de e_G; existe una vecindad simétrica V de e_G tal que $V \subseteq U$. Ya que G es totalmente acotado, podemos encontrar un subconjunto finito $F \subseteq G$ con la propiedad de que $G = F \cdot V$. Considere $L = \{x^{-1} : x \in F\}$. Se verifica fácilmente que $G = V \cdot L$ y con mayor razón $G = U \cdot L$.

(2) Sea U una vecindad de la identidad e en H. Existen vecindades V y W de e en G tales que $V \cap H = U$ y $W^{-1}W \subseteq V$. Como G es totalmente acotado, existe un subconjunto finito $F \subseteq G$ tal que $G = F \cdot W$. Si $x \in F$ y xW interseca al subgrupo H, tomamos un punto $a_x \in H \cap xW$; si no es así hacemos $a_x = e$. Se comprueba que $A = \{a_x : x \in F\}$ es finito y $H = A \cdot U$.

(3) Sean V una vecindad abierta de e_K en K y $\varphi\colon G \to K$ un homomorfismo continuo y suprayectivo. El conjunto $U = \varphi^{-1}(V)$ es abierto en G y contiene a e_G; por lo tanto, existe un subconjunto finito, y F de G tal que $G = F \cdot U$. El conjunto $L = \varphi(F)$ es finito y es fácil probar que se satisface $L \cdot V = \varphi(F \cdot U) = \varphi(G) = K$.

(4) Sean U y W vecindades de la identidad e de L tales que W es simétrica y $W^2 \subseteq U$. Entonces $V = W \cap K \neq \varnothing$ es una vecindad de e en K y, por lo tanto, existe un subconjunto finito $F \subseteq K$

tal que $K \subseteq F \cdot V$. Se afirma que $L = F \cdot U$. Sea $g \in L$, y entonces existe $h \in K \cap gW$. Por consiguiente, $h = gw$ para algún $w \in W$. Además, $h = fv$ para ciertos $f \in F$, $v \in V$. Así es que $g = hw^{-1} = fvw^{-1} \in F \cdot W \cdot W \subseteq F \cdot U$. De lo anterior obtenemos, $L = F \cdot U$.

□

Note que los puntos con coordenadas racionales en el grupo del círculo forman un subgrupo del grupo del círculo $\mathbb{T}$ que es totalmente acotado denso y no compacto. Esto último demuestra que la clase de los grupos totalmente acotados es estrictamente más amplia que la clase de los grupos compactos.

Un grupo topológico G es *compacto de origen* si existe una vecindad V de e_G tal que $\overline{V}$ es compacto y el conjunto V genera al grupo G, es decir, $G = \langle V \rangle$.

Si el grupo G está generado por un subconjunto H compacto, entonces G es *compacto generado*.

Si G es compacto de origen, entonces G es σ-compacto, es decir, es la unión numerable de subespacios compactos: sea $U = V \cup V^{-1}$, donde V es como en la definición, claramente $G = \bigcup_{n<\omega} U^n$ y cada una de las potencias $\overline{U}^n$ es compacta y $G = \bigcup_{n<\omega} \overline{U}^n$.

Teorema 2.2.2. *Sea G un grupo topológico con un subgrupo normal y compacto H tal que G/H es compacto generado. Entonces G es compacto generado.*

Demostración. Sea $\pi\colon G \to G/H$ el homomorfismo canónico y suponga que $\pi(A)$ es compacto y genera a G/H. Dado que π es perfecta sabemos que AH es compacto. Por lo tanto, $(AH) \cup H$ es compacto. Se verifica fácilmente que $(AH) \cup H$ genera a G. □

Teorema 2.2.3. *Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo normal de G. Si G/H y H son compactos generados, entonces G también es compacto generado.*

Demostración. Sea $\pi\colon G \to G/H$ la función canónica. Suponga que $\pi(X)$ es un compacto que genera G/H. Ya que π es perfecta podemos suponer que X es compacto. Si A es un subconjunto compacto de H que genera a H, entonces $A \cup X$ es un subconjunto compacto de G que genera a G. □

2.3. Funciones cardinales y compacidad

En esta sección describiremos cómo se comportan varias funciones cardinales en grupos topológicos compactos o con propiedades relacionadas con la compacidad.

El primer resultado establece la coincidencia del carácter y del peso en cierta clase de grupos topológicos.

TEOREMA 2.3.1. *Sea G un grupo topológico con la propiedad de que para cada vecindad U de e_G existe un subconjunto $D_U \subseteq G$ tal que $|D_U| \leq \chi(G)$ y $G = U \cdot D_U$. Entonces $w(G) = \chi(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Siempre se cumple que $\chi(G) \leq w(G)$, pues cualquier base para G resulta una base local para cualquier punto $g \in G$. Resta demostrar que $w(G) \leq \chi(G)$.

Sea $\mathcal{B}(e_G)$ una base local para e_G con cardinalidad igual a $\chi(G)$. Definimos $\mathcal{B} = \{Bx : B \in \mathcal{B}(e_G), x \in D_B\}$, donde D_B es un subconjunto de G tal que $G = B \cdot D_B$. Sabemos que $\mathcal{B}$ es una base para G y de la definición se desprende que

$$|\mathcal{B}| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}(e_G)} |D_B| \leq \chi(G) \cdot \chi(G) = \chi(G),$$

por lo cual, $w(G) \leq \chi(G)$. □

COROLARIO 2.3.2. *Sea G un grupo σ-compacto, entonces $w(G) = \chi(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Observe que si G es σ-compacto y U es una vecindad de e_G, entonces existe un subconjunto numerable $F \subseteq G$ tal que $G = U \cdot F$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 2.3.1. □

Recordemos que el número de Lindelöf de un espacio X es el número cardinal más peque¤o $l(X)$ tal que toda cubierta abierta admite una subcubierta de cardinalidad $l(X)$.

Ahora probaremos que la cardinalidad de ciertos grupos es de la forma 2^κ donde κ es el peso del grupo en cuestión.

TEOREMA 2.3.3. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y σ-compacto. Entonces, si G no es discreto, se cumple que $|G| = 2^{w(G)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Observe que G es un grupo de Lindelöf pues G es σ-compacto y por lo tanto su número de Lindelöf $l(G)$ es numerable. Dado que nuestro grupo G es Hausdorff, tenemos que $|G| \leq 2^{l(G)\cdot\chi(G)} = 2^{\chi(G)} = 2^{w(G)}$.

Por otro lado, G es un espacio homogéneo no discreto y por eso $\chi(g, G) = \chi(e_G, G) = \chi(G) \geq \aleph_0$ para toda $g \in G$. Del teorema de Čech-Pospišil sabemos que $|G| \geq 2^{\chi(G)}$, así que $|G| = 2^{\chi(G)}$. Puesto que $w(G) = \chi(G)$ (Corolario 2.3.2), concluimos que $|G| = 2^{w(G)}$. □

COROLARIO 2.3.4. *Sea G un grupo topológico compacto infinito. Entonces $|G| = 2^{w(G)}$.*

Ahora probaremos que todo grupo compacto satisface la condición de Souslin, es decir, que tiene celularidad numerable. Recuerde que un espacio satisface la condición de Souslin si toda familia de abiertos no vacíos mutuamente ajenos es a lo más numerable. De hecho, en el capítulo 5 se prueba un resultado más general: todo grupo σ-compacto satisface la condición de Souslin. Sin embargo, la demostración para el caso compacto (debida a D. Strauss) es muy sencilla y vale la pena presentarla. Antes necesitamos una proposición auxiliar.

Una función real f definida en una clase de subconjuntos de un espacio X a $[0,1]$ se llamará *monótona* si siempre que $U \subseteq V$ se cumple que $f(U) \leq f(V)$.

Proposición 2.3.5. *Sea X un espacio regular que admite una función f monótona del conjunto de todos los subconjuntos abiertos no vacíos de X a $(0,1]$ tal que $f(G \cup H) \geq f(G) + f(H)$ siempre que $\overline{G} \cap \overline{H} = \varnothing$. Entonces $c(X) \leq \aleph_0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una familia de abiertos no vacíos en X y $\mathcal{V}'$ la familia de uniones de subfamilias numerables de $\mathcal{V}$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\mathcal{V}$ contiene a todo abierto O tal que $\overline{O} \subseteq U$ para alguna $U \in \mathcal{V}$. Entonces existe $V \in \mathcal{V}'$ tal que $f(V) = \sup\{f(W) : W \in \mathcal{V}'\}$: sea a el supremo de $\{f(W) : W \in \mathcal{V}'\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $B_n \in \mathcal{V}'$ tal que $a < \frac{1}{n} + f(B_n)$. Claramente $V = \cup_{n<\omega} B_n$ cumple el requisito.

De la definición de V se desprende que $U \subseteq \overline{V}$ para toda $U \in \mathcal{V}$: si no fuera así, existiría, por la regularidad de X, un subconjunto abierto no vacío O con $\overline{O} \subseteq U \setminus \overline{V}$. Esto último implica que $V \cup O \in \mathcal{V}'$, $f(V \cup O) \geq f(V) + f(O) > f(V)$, lo que contradice la elección de V. Está claro que la subfamilia de $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos ajenos dos a dos debe ser numerable; en caso contrario, no podríamos encontrar un elemento $V \in \mathcal{V}'$ que satisfaga $U \subseteq \overline{V}$ para todo $U \in \mathcal{V}$. □

Teorema 2.3.6. *Sea G un grupo compacto. Entonces $c(G) = \aleph_0$.*

Demostración. Todo lo que debemos hacer es encontrar una función de la familia de abiertos no vacíos de G en $(0,1]$ que satisfaga las condiciones de la proposición 2.3.5.

Sea $\mathcal{F}(e_G)$ el filtro de vecindades abiertas de la identidad e_G en G. Si W y V son abiertos no vacíos en G, sea $n_W(V)$ el número más pequeño de traslaciones derechas de W que cubren a V. Sea

$$f(V) = \sup\{\inf\{n_U(V)/n_U(G) : U \in \mathcal{F}(e_G), U \subseteq W\} : W \in \mathcal{F}(e_G)\}.$$

Es claro que f es monótona. Además, si $\overline{O} \cap \overline{O'} = \varnothing$, existe una $W \in \mathcal{F}(e_G)$ tal que siempre que $U \in \mathcal{F}(e_G)$ y $U \subseteq W$, tenemos

$n_U(O \cup O') = n_U(O) + n_U(O)$, lo cual implica la desigualdad requerida para f. □

2.4. Acerca de la teoría de la dualidad

Los siguientes resultados relativos a grupos localmente compactos nos dan información de la estructura algebraica (y topológica) de estos grupos. Observe que pedimos que el grupo sea abeliano. Ésta es una de las muchas ocasiones en las que aparece la dificultad de tratar con grupos no abelianos, de los cuales, en general, se conoce poco. Estos teoremas son importantes en el desarrollo de la teoría de la dualidad de Pontryagin-Van Kampen para grupos abelianos localmente compactos. Vale la pena describir muy brevemente la idea de esta teoría en el presente capítulo, pues se desarrolla para grupos localmente compactos.

La teoría de Pontryagin-Van Kampen establece que todo grupo localmente compacto G es el grupo dual de su grupo dual, donde el grupo dual $G^\#$ de G es el grupo de todos los homomorfismos continuos de G al grupo del círculo $\mathbb{T}$ con la topología "compacta-abierta" (véase [**32**], Sec. 3.4). En otras palabras, toda porción de información relativa a un grupo localmente compacto está contenida en alguna parte de su grupo dual. Por ejemplo, $G^\#$ es discreto si G es compacto y viceversa; si G es un grupo abeliano compacto Hausdorff, entonces G es metrizable si y sólo si $G^\#$ es numerable; G es conexo si y sólo si $G^\#$ es libre de torsión. Así, cualquier grupo compacto abeliano puede caracterizarse mediante propiedades puramente algebraicas de su grupo dual discreto.

En la teoría algebraica de grupos, los grupos cíclicos desempeñan un papel muy importante. Como se verá, lo mismo ocurre para los grupos topológicos.

Un grupo topológico se llama *monotético* si tiene un subgrupo cíclico denso.

Por ejemplo, el grupo $\mathbb{T}$ es monotético y todas las potencias finitas de este grupo también lo son.

El siguiente teorema es importante por sí mismo y además es el primer paso en el desarrollo de la teoría de la dualidad.

TEOREMA 2.4.1. *Sea G un grupo monotético localmente compacto. Entonces G es compacto o G es topológicamente isomorfo al grupo discreto $\mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si G es un grupo discreto, entonces $G = \mathbb{Z}$ o G es un grupo cíclico finito y por lo tanto compacto. Debemos entonces probar que G es compacto si no es discreto.

Suponga que G no es discreto. Entonces G es infinito, y sea H un subgrupo cíclico denso de G; digamos que el subgrupo H está generado por x, es decir, $H = \langle x \rangle$, el cual es no discreto e infinito. Note que ambos grupos, G y H, son abelianos.

Sea V una vecindad simétrica y abierta de la identidad en G con $\overline{V}$ compacta. Si $g \in G$, entonces $V + g$ contiene a kx para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, existe una vecindad simétrica W de e_G en G tal que $(g - kx) + W \subseteq V$. Como G no es discreto, W contiene un número infinito de nx y dado que W es simétrico, $-nx \in W$ si $nx \in W$. Así, existe una $j < k$ tal que $jx \in W$. Hagamos $i = k - j$. Entonces $i > 0$ y $g - ix = g - kx + jx \in (g - kx) + W \subseteq V$. Esto demuestra que $G = \bigcup_{i<\omega}(ix + V)$. Ya que $\overline{V}$ es compacto en G, tenemos

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(ix + V), \quad \text{para alguna } N > 0. \tag{2.1}$$

Sea $g \in G$ un elemento arbitrario y sea $n = n(g)$ el número natural positivo más peque¤o tal que $g \in nx + \overline{V}$. De 2.1 obtenemos $nx - g \in ix + \overline{V}$, donde $0 < i \leq N$. Entonces $g \in (n - i)x + \overline{V}$ y por la definición de n concluimos que $n \leq i$. Note que el conjunto $\overline{V}$ es simétrico al ser la cerradura de un conjunto simétrico V. Así, para cada $g \in G$, $n(g) \leq N$, lo cual significa que

$$G = \bigcup_{i=1}^{N}(ix + \overline{V}),$$

una unión finita de subconjuntos compactos, y de aquí se deduce la compacidad de G. □

En el segundo paso del desarrollo de la teoría de la dualidad de Pontryagin-Van Kampen se obtiene el siguiente teorema, el cual describe la forma o estructura de los grupos abelianos localmente compactos que son generados por un subconjunto compacto. Esto nos da una primera etapa hacia la generalización topológica de un teorema bien conocido, el cual afirma que todo grupo abeliano generado por un subconjunto finito se puede expresar como el producto directo de grupos cíclicos.

TEOREMA 2.4.2. *Todo grupo abeliano localmente compacto y compacto generado G es topológicamente isomorfo al producto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}^k \times F$, donde $m, k \in \mathbb{N}$, F un grupo compacto y $\mathbb{Z}$ discreto.*

Capítulo 3

Grupos metrizables y seudonormas

En este capítulo estudiaremos el concepto de seudonorma en grupos topológicos, de gran importancia para el resto del libro porque proporciona métodos alternativos para abordar algunos temas básicos, como la metrización de grupos y la definición de topologías en grupos libres. En ambos casos se puede caracterizar la familia de vecindades de la identidad en términos de seudonormas. Además, en este capítulo demostraremos, como consecuencia de que la topología de un grupo se puede generar con seudonormas, algunos resultados sobre metrización de grupos topológicos.

3.1. Seudonormas

Comenzamos con la definición y las propiedades elementales de las seudonormas.

Sean G un grupo y N una función de valores reales no negativos definida en G. Diremos que *N es una seudonorma en G* si cumple las condiciones siguientes:

i) Si e es la identidad del grupo G, entonces $N(e) = 0$.

ii) Si x y y son elementos arbitrarios de G, entonces

$$N(xy^{-1}) \leq N(x) + N(y).$$

Si además se cumple la condición $N(x) \neq 0$ para todo $x \neq e$, entonces diremos que N es una *norma* en G.

Las siguientes propiedades se deducen fácilmente a partir de la definición de seudonorma.

Lema 3.1.1. *$N(x) \geq 0$ y $N(x) = N(x^{-1})$ para $x \in G$ arbitrario.*

Demostración. Si sustituimos $x = e$ en (ii) de la definición, obtenemos $N(y^{-1}) \leq N(e) + N(y) = N(y)$. De manera similar, podemos obtener $N(y) \leq N(y^{-1})$, de donde se deduce que $N(y^{-1}) = N(y)$. □

Además, de la propiedad (ii) y el lema 3.1.1 podemos deducir el siguiente lema, cuya demostración se deja como ejercicio al lector.

LEMA 3.1.2. *Si N es una seudonorma en el grupo G, entonces*

$$N(xy) \leq N(x) + N(y), \qquad \text{para cualesquier } x, y \in G.$$

LEMA 3.1.3. *Si N es una seudonorma en el grupo G, entonces*

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y), \qquad \text{para cualesquier } x, y \in G.$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver, mediante una aplicación del lema 3.1.2 a $y = x(x^{-1}y)$ y $x = y(x^{-1}y)^{-1}$ y de la propiedad (ii), que

$$N(y) \leq N(x) + N(x^{-1}y),$$
$$N(x) \leq N(y) + N(x^{-1}y),$$

de donde obtenemos

$$N(y) - N(x) \leq N(x^{-1}y),$$
$$N(x) - N(y) \leq N(x^{-1}y).$$

De estas desigualdades obtenemos $|N(y) - N(x)| \leq N(x^{-1}y)$. □

Las demostraciones (fáciles) de los dos lemas siguientes se dejan como ejercicio al lector.

LEMA 3.1.4. *El producto de una seudonorma en G por un número real no negativo es una seudonorma en G.*

LEMA 3.1.5. *La suma de dos seudonormas de un grupo G también es una seudonorma de G.*

El siguiente lema nos proporciona un método para definir una seudonorma a partir de una función.

LEMA 3.1.6. *Si f es una función real acotada cuyo dominio es el grupo G, entonces la función N en G definida por*

$$N(x) = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)|, \qquad (x \in G)$$

es una seudonorma en G.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que $N(e) = 0$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} N(xy^{-1}) &= \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - f(z)| \\ &\leq \sup_{z \in G} \big(|f(zxy^{-1}) - f(zx)| + |f(zx) - f(z)| \big) \\ &\leq \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - f(zx)| + \sup_{z \in G} |f(zx) - f(z)| \\ &= \sup_{t \in G} |f(ty^{-1}) - f(t)| + \sup_{z \in G} |f(zx) - f(z)| \\ &= N(y^{-1}) + N(x). \end{aligned}$$

Además, si definimos $z = yx^{-1}$, entonces

$$N(x^{-1}) = \sup_{y\in G} |f(yx^{-1}) - f(y)| = \sup_{z\in G} |f(z) - f(zx)| = N(x).$$

En consecuencia, aplicando esta última igualdad con y en lugar de x, tenemos que $N(xy^{-1}) \leq N(y^{-1}) + N(x) = N(y) + N(x)$. La función N cumple entonces las condiciones (i) y (ii) de la definición de seudonorma. □

LEMA 3.1.7. *Sean φ un homomorfismo del grupo G al grupo H y P una seudonorma en H; entonces la función $P \circ \varphi$ es una seudonorma en G.*

La demostración del lema anterior se deja como ejercicio al lector.

Sean G un grupo y N una seudonorma en G. Diremos que N *es una seudonorma invariante* si $N(x) = N(y^{-1}xy)$ para cualesquier x y y en G.

Observe que si sustituimos x por yx en la definición, obtenemos la siguiente condición equivalente para seudonormas invariantes:

$$N(xy) = N(yx) \quad \text{para cualesquier } x \text{ y } y \text{ en } G.$$

Hasta ahora sólo hemos considerado grupos sin estructura topológica. En lo sucesivo consideraremos grupos topológicos y seudonormas continuas. Una seudonorma es continua si es continua como función de $G \times G$ a $\mathbb{R}$. El siguiente resultado es una consecuencia sencilla del hecho de que para toda a en un grupo topológico G la función definida por $x \mapsto a^{-1}xa$ es un automorfismo continuo de G, y de que la composición de funciones continuas es continua.

LEMA 3.1.8. *Si $a \in G$ y N es una seudonorma continua en el grupo G, entonces la seudonorma N_a en G definida por la fórmula*

$$N_a(x) = N(a^{-1}xa), \qquad (x \in G)$$

también es una seudonorma continua en G.

DEMOSTRACIÓN. Para e, la identidad de G, tenemos $N_a(e) = N(a^{-1}ea) = N(e) = 0$. Si x y y son elementos de G, entonces

$$\begin{aligned} N_a(xy^{-1}) &= N(a^{-1}xy^{-1}a) = N(a^{-1}xaa^{-1}y^{-1}a) \\ &= N\big((a^{-1}xa)(a^{-1}ya)^{-1}\big) \\ &\leq N(a^{-1}xa) + N(a^{-1}ya) = N_a(x) + N_a(y), \end{aligned}$$

es decir, N_a es una seudonorma que además es continua porque es la composición de las funciones continuas N y $\varphi_a\colon G \to G$, donde φ_a está definida por $\varphi_a(x) = a^{-1}xa$. □

El siguiente resultado establece la continuidad de una seudonorma a partir de su continuidad en la identidad del grupo. Como ya vimos en el capítulo 1, este resultado también es válido para homomorfismos.

LEMA 3.1.9. *Una seudonorma N en un grupo topológico G es continua si y sólo si dado un número positivo ε existe una vecindad U del elemento unitario e_G tal que para todo punto x de la vecindad U,*

$$N(x) < \varepsilon.$$

Esto es, si N es continua en e_G, esta seudonorma es continua en todo el grupo.

DEMOSTRACIÓN. Si la seudonorma N es continua, entonces, en particular, es continua en la identidad de G, es decir, para todo número positivo ε existe una vecindad U del punto e_G tal que

$$|N(x) - N(e)| < \varepsilon$$

para todo $x \in G$. Por lo tanto, la desigualdad se deduce de que $N(e) = 0$.

Por otro lado, supongamos que N satisface la condición enunciada en este lema. Sea z un elemento arbitrario de G y sea ε un número positivo. Existe una vecindad U de e tal que $N(x) < \varepsilon$ para cada $x \in U$. El conjunto zU es una vecindad de z. Si $y \in zU$, entonces $z^{-1}y \in U$, de donde $N(z^{-1}y) < \varepsilon$; por lo tanto,

$$|N(z) - N(y)| < \varepsilon,$$

lo cual significa precisamente que N es continua en z. □

En el siguiente lema, que es muy importante por sus consecuencias, utilizaremos la siguiente notación, donde N es una seudonorma definida en un grupo topológico G.

$$B_N(\varepsilon) = \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$$

LEMA 3.1.10. *Supongamos que $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de vecindades simétricas de la identidad de un grupo topológico G tales que*

$$U_{i+1}^2 \subseteq U_i,$$

y entonces podemos definir en el grupo G una seudonorma N tal que

$$B_N\left(\tfrac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i \subseteq B_N\left(\tfrac{1}{2^{i-1}}\right) \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Si los conjuntos de esta sucesión poseen además la propiedad

$$y^{-1}U_i y = U_i \qquad \text{para } y \in G \text{ e } i \in \mathbb{N} \text{ arbitrario}$$

entonces se puede definir la seudonorma N de manera que sea invariante.

DEMOSTRACIÓN. Primero construiremos por inducción una familia de vecindades de la identidad comenzando con $U(1) = U_0$. Luego definimos las vecindades $U(\frac{m}{2^n})$, en donde n es fijo y $m = 1, 2, 3, \dots, 2^n$, de la siguiente manera:

$$U\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}\right) = U_{n+1}, \tag{3.2}$$

$$U\left(\tfrac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = U\left(\tfrac{m}{2^n}\right)U_{n+1}, \qquad (m = 1, 2, \dots, 2^n - 1). \tag{3.3}$$

Hemos definido por inducción un sistema de vecindades de la identidad $U(r)$, en donde r recorre todas las fracciones diádicas positivas. Además, definimos

$$U\left(\tfrac{m}{2^n}\right) = G \qquad \text{para } m > 2^n. \tag{3.4}$$

Ahora probaremos por inducción que

$$U\left(\tfrac{m}{2^n}\right)U\left(\tfrac{1}{2^n}\right) \subseteq U\left(\tfrac{m+1}{2^n}\right) \tag{3.5}$$

En efecto, si $m \geq 2^n$, entonces esta relación se deduce directamente de 3.4. Cuando $n = 1$ tenemos

$$U\left(\tfrac{1}{2}\right)U\left(\tfrac{1}{2}\right) = U_1U_1 \subseteq U_0 = U(1).$$

Ahora tomaremos dos casos: m par y m impar. Supongamos primero que $m = 2k$, donde k es un entero positivo, y que la relación vale para $p < n$, entonces en virtud de las relaciones 3.1.10, 3.2 y 3.3 tenemos que

$$U\left(\tfrac{m}{2^n}\right)U\left(\tfrac{1}{2^n}\right) = U\left(\tfrac{k}{2^{n-1}}\right)U_n = U\left(\tfrac{2k+1}{2^n}\right) = U\left(\tfrac{m+1}{2^n}\right);$$

y si ahora $m = 2k + 1$,

$$\begin{aligned} U\left(\tfrac{m}{2^n}\right)U\left(\tfrac{1}{2^n}\right) &= U\left(\tfrac{2k+1}{2^n}\right)U_n = U\left(\tfrac{k}{2^{n-1}}\right)U_nU_n \subseteq U\left(\tfrac{k}{2^{n-1}}\right)U_{n-1} \\ &= U\left(\tfrac{k}{2^{n-1}}\right)U\left(\tfrac{1}{2^{n-1}}\right) \subseteq U\left(\tfrac{k+1}{2^{n-1}}\right) = U\left(\tfrac{m+1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Con esto terminamos la verificación de 3.5.

Supongamos que tenemos un par de fracciones diádicas tales que $0 < r < s$. Entonces podemos suponer que $r = \frac{k}{2^n}$ y $s = \frac{m}{2^n}$, donde $k < m$, por lo tanto, de 3.5 y 3.2 se deduce que $U(r) \subseteq U(s)$. Sea ahora $x \in G$, y definimos $f(x)$ como la máxima cota inferior de todas las fracciones r para las cuales $x \in U(r)$. Como $U(r) = G$ si $r > 1$, entonces $f(x) \leq 1$ para todos los elementos de G. De la definición de f vemos que si $f(x) < r$, entonces $x \in U(r)$. Puesto que $e \in U(\frac{1}{2^n})$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$, deducimos que $f(e) = 0$.

Como la función $f(x)$ está acotada en G, podemos, de acuerdo con el lema 3.1.6, definir la seudonorma N en el grupo G mediante la fórmula

$$N(x) = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)|,$$

y probaremos que esta seudonorma cumple con la condición 3.1.10.

En efecto, si $N(x) < \frac{1}{2^i}$ para alguna x de G, entonces, como $f(e) = 0$, obtenemos, debido a la definición de la seudonorma N,

$$f(x) = |f(ex) - f(e)| \leq N(x) < \frac{1}{2^i}.$$

De acuerdo con la observación mencionada antes, se deduce que

$$x \in U\left(\tfrac{1}{2^i}\right) = U_i,$$

y, por lo tanto,

$$B_N\left(\tfrac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i.$$

Por otro lado, si $x \in U_i$ y y es un elemento arbitrario de G, se puede hallar un número natural $k \geq 1$ tal que

$$\frac{k-1}{2^i} \leq f(y) < \frac{k}{2^i}.$$

Sin embargo, de acuerdo con la observación anterior, tenemos que

$$y \in U\left(\tfrac{k}{2^i}\right),$$

y, por tanto,

$$yx \in U\left(\tfrac{k}{2^i}\right)U_i, \qquad yx^{-1} \in U\left(\tfrac{k}{2^i}\right)U_i^{-1};$$

como la vecindad U_i es simétrica, y de 3.2 y 3.5, obtenemos

$$yx \in U\left(\tfrac{k+1}{2^i}\right), \qquad yx^{-1} \in U\left(\tfrac{k+1}{2^i}\right).$$

En consecuencia,

$$f(yx) \leq \frac{k+1}{2^i},$$
$$f(yx^{-1}) \leq \frac{k+1}{2^i}.$$

Sin embargo,

$$f(yx) - f(y) \leq \frac{k+1}{2^i} - \frac{k-1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}},$$
$$f(yx^{-1}) - f(y) \leq \frac{k+1}{2^i} - \frac{k-1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Las relaciones anteriores valen para y arbitrario en G y, por lo tanto, sustituyendo yx en lugar de y en la segunda, obtenemos

$$f(y) - f(yx) \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

y por consiguiente,

$$|f(yx) - f(y)| \leq \frac{1}{2^{i-1}}$$

para $y \in G$ arbitrario, de donde

$$N(x) \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

y de esta forma

$$U_i \subseteq B_N\left(\tfrac{1}{2^{i-1}}\right),$$

con lo cual hemos demostrado la validez de la relación 3.1 para la seudonorma N. La misma condición 3.1 implica que N es continua en la identidad e del grupo G, y por el lema 3.1.9 N es continua en todo el grupo G.

Por último, observemos que si el conjunto U_i ($i = 0, 1 \dots$) cumple la condición 3.1.10, entonces esta misma condición la cumplen todos los conjuntos $U(r)$ definidos inductivamente según las fórmulas 3.2, 3.3 y 3.4. No obstante, para la función f definida antes tenemos

$$f(y^{-1}xy) = f(x) \quad \text{para cualesquier } x, y \in G.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} N(y^{-1}xy) &= \sup_{z\in G} |f(zy^{-1}xy) - f(z)| \\ &= \sup_{z\in G} |f(yzy^{-1}x) - f(yzy^{-1})| = N(x). \end{aligned}$$

Como z recorre todos los elementos del grupo G, yzy^{-1} también recorre todos los elementos del grupo G. De esta forma, en el caso especial que consideramos, la seudonorma N es invariante y el lema 3.1.10 queda demostrado. □

El siguiente resultado dice que la topología de un grupo se puede definir mediante seudonormas continuas. Lo aplicaremos para probar que todo grupo topológico es completamente regular (Teorema 3.1.12 y todo grupo primero numerable es metrizable (Teorema 3.2.2).

Teorema 3.1.11. *Sea G un grupo topológico y U una vecindad de la identidad de G. Entonces, en el grupo topológico G existe una seudonorma continua N tal que el conjunto*

$$U_N = \{x \in G : N(x) < 1\}$$

está contenido en la vecindad U:

$$U_N \subseteq U.$$

Demostración. Si suponemos que $U_0 = U \cap U^{-1}$, tomemos una sucesión $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ de vecindades simétricas de la identidad en el grupo G que cumple la condición 3.1.10 del lema 3.1.10. De acuerdo con esto, en el grupo G existe una seudonorma continua N tal que

$$B_N\left(\tfrac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i \subseteq B_N\left(\tfrac{1}{2^{i-1}}\right) \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Para $i = 0$ deducimos de 3.6

$$U_N = B_N(1) \subseteq U,$$

y por lo tanto $U_N \subseteq U$. □

Como se sabe, existen espacios topológicos Hausdorff no regulares y además hay espacios regulares Hausdorff que no son completamente regulares. La presencia de la estructura de grupo impide estas situaciones: todo grupo topológico Hausdorff es regular. A partir del teorema 3.1.11, obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 3.1.12. *Todo grupo topológico es completamente regular.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x un elemento arbitrario y U una vecindad de este elemento en el grupo topológico G. Debemos mostrar la existencia de una función continua f en G tal que $f(x) = 0$ y

$$\{y \in G : f(y) < 1\} \subseteq U.$$

Con este fin, consideremos la vecindad $x^{-1}U$ de la identidad en el grupo G. Por el teorema 3.1.11, en el grupo G existe una seudonorma continua N tal que $B_N(1) \subseteq x^{-1}U$. Sin embargo, la función f definida por la fórmula $f(y) = N(x^{-1}y)$ es continua en G, $f(x) = 0$ y de $f(y) < 1$ se deduce que $x^{-1}y \in x^{-1}U$; por lo tanto, $y \in U$, es decir, $\{y \in G : f(y) < 1\} \subseteq U$, que es lo que se quería demostrar. □

Otra consecuencia importante del teorema 3.1.11 es que la topología de cualquier grupo topológico se puede generar mediante una familia de seudonormas. En efecto, si U es cualquier vecindad de la identidad, por el teorema 3.1.11 existe una seudonorma continua N tal que $U_N \subseteq U$. Esto implica que todas las vecindades de la identidad se pueden generar mediante alguna seudonorma continua.

3.2. Metrizabilidad

Ahora estudiaremos grupos que cumplen con el primer axioma de numerabilidad y su relación con la existencia de métricas invariantes por un lado en grupos topológicos.

Sea G un grupo con una métrica ρ. La métrica ρ es *invariante por la izquierda* si la relación

$$\rho(zx, zy) = \rho(x, y)$$

se cumple para cualesquier x, y y z elementos de G. De una manera similar se define una *métrica invariante por la derecha.* Una métrica en el grupo G que es simultáneamente invariante por la izquierda y por la derecha recibe el nombre de *métrica invariante.*

Sea G un grupo topológico con una métrica continua ρ. Diremos que ρ *genera* la topología de G si la familia $\{O_\rho(x, \varepsilon) : x \in G, \varepsilon > 0\}$ es una base para la topología original de G, donde

$$O_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in G : \rho(y, x) < \varepsilon\} \quad \text{para } x \in G \text{ y } \varepsilon > 0.$$

Si en un grupo topológico G existe una métrica invariante por la izquierda ρ que genera su topología, entonces en este grupo existe una métrica invariante por la derecha ρ_1 que genera la topología de G definida por la fórmula

$$\rho_1(x, y) = \rho(x^{-1}, y^{-1}).$$

El recíproco también es válido.

En los siguientes resultados relacionaremos los conceptos de métrica y norma. Para ello, las métricas invariantes por algún lado son las más adecuadas, y más aún las métricas invariantes porque existe una relación sencilla entre éstas y las normas en un grupo topológico. Sea ρ una métrica continua invariante por la derecha en grupo G; entonces la función

$$N(x) = \rho(x, e) \tag{3.7}$$

es una norma continua en el grupo G. En efecto, es evidente que $N(e) = 0$ y

$$\begin{aligned} N(xy^{-1}) &= \rho(xy^{-1}, e) = \rho(x, y) \\ &\leq \rho(x, e) + \rho(y, e) = N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Por último, si $x \neq e$, entonces $N(x) = \rho(x, e) > 0$. La continuidad de N es evidente.

Ahora demostraremos un teorema sobre metrización de grupos topológicos. Por supuesto, un espacio topológico metrizable cumple con el primer axioma de numerabilidad. En general, la afirmación inversa no es verdadera. Existen espacios no metrizables que son normales y cumplen el primer axioma de numerabilidad, por ejemplo la flecha de Sorgenfrey (véase el Ej. 1.5.17 de [**32**]). Si se trata de grupos topológicos, la afirmación inversa es verdadera.

Teorema 3.2.1. *Todo grupo topológico G que cumple el primer axioma de numerabilidad posee una métrica continua invariante por la derecha que genera la topología de G.*

Demostración. Si G es un grupo topológico que cumple con el primer axioma de numerabilidad, entonces existe una base numerable $\{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ de la identidad e del grupo G. Se puede elegir como sistema de vecindades de la identidad de G una sucesión de conjuntos abiertos $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ tales que

$$U_i^{-1} = U_i, \quad \text{y} \quad U_{i+1}^2 \subseteq U_i \cap V_i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Por el lema 3.1.10, para esta sucesión existe una norma N continua tal que

$$O_n(e) = \{x \in G : N(x) < \tfrac{1}{2^n}\} \subseteq U_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $O_n \subseteq U_n \subseteq V_n$, la familia $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de la identidad de G. Es fácil ver que la función $\rho\colon G \times G \to \mathbb{R}$ definida por $\rho(x, y) = N(xy^{-1})$ es una métrica continua invariante por la derecha en el grupo G. Por ello, la familia $\{O_n(e) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades de la identidad de G, y al ser ρ invariante por la derecha concluimos que la métrica ρ genera la topología de este grupo. $\square$

El conjunto A en el grupo G se llama *invariante* si para cualquier elemento x del grupo G se cumple la igualdad

$$x^{-1}Ax = A.$$

TEOREMA 3.2.2. *Un grupo topológico que cumple el primer axioma de numerabilidad posee una métrica invariante que genera su topología si y sólo si este grupo posee una base de vecindades de la identidad formada por conjuntos invariantes.*

DEMOSTRACIÓN. Si ρ es una métrica invariante del grupo G que genera la topología de este grupo, entonces como

$$\rho(x, e) = \rho(y^{-1}xy, e_G), \quad \text{para cualesquier } x, y \in G,$$

el conjunto abierto U_ε de los elementos x de G para los cuales $\rho(x, e_G) < \varepsilon$, es invariante respecto a los automorfismos internos del grupo G. La familia de conjuntos $\{U_{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base de vecindades de la identidad mencionada en el teorema.

Recíprocamente, sea G el grupo que posee una base de vecindades de la identidad $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$, cuyos conjuntos son invariantes. Sin perder generalidad, podemos suponer que

$$U_i^{-1} = U_i, \quad U_{i+1}U_{i+1} \subseteq U_i \qquad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

De acuerdo con el lema 3.1.10, en el grupo G existe una norma invariante N continua que cumple la condición 3.1 de aquel lema. La métrica en el grupo G definida con esta norma mediante la fórmula $\rho(x, y) = N(xy^{-1})$ será la métrica invariante buscada. $\square$

Por medio de la caracterización de la clase de los grupos metrizables dada en el teorema 3.2.1, probaremos que esta clase es cerrada al tomar ciertos cocientes.

TEOREMA 3.2.3. *Si H es un subgrupo normal cerrado de un grupo topológico G y los grupos H y G/H cumplen con el primer axioma de numerabilidad, entonces G cumple el primer axioma de numerabilidad.*

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_n \supseteq \cdots$$

una base numerable de vecindades de la identidad de H y

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \cdots$$

una base numerable de vecindades de la identidad de G/H tales que

$$V_{n+1}^2 \subseteq V_n \quad \text{y} \quad U_{n+1}^2 \subseteq U_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una vecindad de la identidad W_n del grupo G tal que

$$W_n \cap (H \setminus V_n) = \varnothing, \quad W_n^{-1} = W_n \quad \text{y} \quad W_n^2 \subseteq W_{n-1} \quad (n \geq 1),$$

donde es fácil ver que

$$W_{n+1} \cdot (H \setminus V_n) \cap W_{n+1} = \varnothing.$$

Si $\pi \colon G \to G/H$ es el homomorfismo natural entre G y G/H, definimos

$$W_n' = \left(G \setminus \overline{W_{n+1} \cdot (H \setminus V_n)}\right) \cap \pi^{-1}(U_n)$$

y

$$U_n' = \bigcap_{i=1}^{n} W_n'.$$

El conjunto U_n' es abierto en G y contiene la identidad del grupo G. Mostraremos que estos conjuntos forman una base de vecindades de la identidad del grupo G.

Sea U una vecindad arbitraria de la identidad en G y sea V una vecindad de la identidad tal que $V^2 \subseteq U$. Entonces existe m tal que $V_m \subseteq V \cap H$ y existe l tal que $l > m$ y $U_l \subseteq \pi(V \cap W_{m+1})$. Demostraremos que $U_l' \subseteq U$. En efecto,

$$\begin{aligned} U_l' &\subseteq W_l' \cap W_m' \subseteq \pi^{-1}(U_l) \cap [G \setminus W_{m+1} \cdot (H \setminus V_m)] \\ &\subseteq (V \cap W_{m+1}) \cdot H \cap [G \setminus W_{m+1} \cdot (H \setminus V_m)] \\ &\subseteq (V \cap W_{m+1}) \cdot H \cap [G \setminus (V \cap W_{m+1}) \cdot (H \setminus V_m)] \\ &= (V \cap W_{m+1}) \cdot H \setminus (V \cap W_{m+1}) \cdot (H \setminus V_m)] \\ &\subseteq (V \cap W_{m+1}) \cdot V_m \subseteq (V \cap W_{m+1}) \cdot V \subseteq V^2 \subseteq U. \end{aligned}$$ □

Podemos formular el teorema 3.2.3 en una forma equivalente:

TEOREMA 3.2.4. *Si H es un subgrupo normal cerrado de un grupo topológico G y los grupos H y G/H son metrizables, entonces G es metrizable.*

Además, el teorema anterior es válido en el caso en que H no es normal en G (y por lo tanto G/H es un espacio cociente, no un grupo).

Bibliografía

[1] Arhangel'skii, A. V. (1979). Cardinal invariants of topological groups. Embeddings and condensations, *Soviet Math. Dokl.* **20**, pp. 783--787. Russian original in: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **247**, pp. 779--782.

[2] Arhangelskii, A. V. (1980). Relations among the invariants of topological groups and their subspaces, *Russian Math. Surveys* **35**, pp. 1--23. Russian original in: *Uspekhi Mat. Nauk* **35**, pp. 3--22.

[3] Arhangel'skii, A. V. (1981). Every topological group is a quotient group of a zero-dimensinal topological group, *Soviet Math. Dokl.* **23**, 3, pp. 615--618. Russian original in: *Dokl. AN SSSR* **258**, pp. 1037--1040.

[4] Arhangel'skii, A. V. (1981). Classes of topological groups, *Russian Math. Surveys* **36**, 3, pp. 151--174. Russian original in: *Uspekhi Mat. Nauk* **36**, pp. 127--146.

[5] Arhangel'skii, A. V. (1987). Topological homogeneity. Topological groups and their continuous images, *Russian Math. Surveys* **42**, 2, pp. 83--131. Russian original in: *Uspekhy Mat. Nauk* **42**, 2, pp. 69--105.

[6] Arhangel'skii, A. V. y Ponomarev, V. I. (1984). *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises* (Reidel, translated from Russian).

[7] Arhangel'skii, A. V. y Uspenskij, V. V. (2006). Topological groups: local versus global, *Appl. General Topology* **7**, 1, pp. 67-72.

[8] Arhangel'skii, A. V. y Tkachenko, M. G. (2008). Topological Groups and Related Structures, *Atlantis Press.*

[9] Birkhoff, G. (1936). A note on topological groups, *Comput. Math.* **3**, pp. 427--430.

[10] Bourbaki, N. (1942). *Éléments de Mathématique*, Premiere Partie, Livre 3, 3-m ed., Actualités Sci. et Ind. no. 916 (Hermann, Paris; *in French*).

[11] Bourbaki, N. (1966). *Éléments de Mathématique*, Fasc. XV. Livre 5: Espaces vectoriels topologiques, Actualités Sci. et Ind. no. 1189 (Hermann, Paris; *in French*).

[12] Brouwer, L. E. J. (1910). On the structure of perfect sets of points, *Proc. Acad. Amsterdam* **12**, pp. 785--794.

[13] Brown, L. G. (1972). Topologically complete groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **35**, pp. 593--600.

[14] Cartan, É. (1930). La Théorie des Groupes Finis et Continus et l'Analysis Situs, *Mémorial des Sci. Math.* **42** (Gauthier-Villars&Cie, Paris).

[15] Chevalley, C. (1946). *Theory of Lie Groups I*, Princeton Univ. Press (Princeton, New York).

[16] Choban, M. M. (1970). On completions of topological groups, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mekh.* 1, pp. 33--38 (*in Russian*).

[17] Choban, M. M. (1977). Topological structure of subsets of topological groups and their quotients, In: *Topological Structures and Algebraic Systems*, pp. 117--163 (Shtiintsa, Kishinev; *in Russian*).

[18] Choban, M. M. (1985). On the theory of topological algebraic systems, *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **48**, pp. 106--149 (*in Russian*).

[19] Civin, P. and Yood, B. (1961). The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra, *Pacific J. Math.* **11**, pp. 847--870.

[20] Comfort, W. W. (1968). On the Hewitt realcompactification of the product space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **131**, pp. 107--118.

[21] Comfort, W. W. (1975). Compactness-like properties for generalized weak topological sums, *Pacific J. Math.* **60**, pp. 31--37.

[22] Comfort, W. W. (1984). *Topological groups*, In: *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen and J.E. Vaughan, eds., Ch. 24, pp. 1143--1263 (North-Holland, Amsterdam).

[23] Comfort, W. W. and Remus, D. (1994). Compact groups of Ulam-measurable cardinality: partial converse to theorems of Arhangel'skii and Varopoulos, *Math. Japonicae* **39**, pp. 203--210.

[24] Comfort, W. W. and Ross, K. A. (1964). Topologies induced by groups of characters, *Fund. Math.* **55**, pp. 283--291.

[25] Comfort, W. W. and Ross, K. A. (1966). Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups, *Pacific J. Math.* **16**, 3, pp. 483--496.

[26] Dieudonné, J. (1944). Sur la complétion des groupes topologiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **218**, pp. 774--776.

[27] Dieudonné, J. On topological groups of homeomorphisms, *Amer. J. Math.* **70** (1948), 659--680.

[28] Efimov, B. A. (1965). Dyadic bicompacta, *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **14**, pp. 211--247 (*in Russian*).

[29] Ellis, R. (1957). Locally compact transformation groups, *Duke Math. J.* **24**, pp. 119--125.

[30] Ellis, R. (1969). *Lectures on Topological Dynamics* (Benjamin, New York).

[31] Ellis, R. and Gottshalk, W. (1960). Homomorphisms of compact transformation groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **94**, pp. 258--271.

[32] Engelking, R. (1977). *General Topology* (PWN, Polish Scientific Publ., Warszawa).

[33] Engelking, R. (1978). *Dimension Theory* (PWN, Polish Scientific Publ., Warszawa).

[34] Fréchet, M. (1910). Les dimensions d'un ensemble abstrait, *Math. Ann.* **68**, pp. 145--168.

[35] Fremlin, D. H. (1984). *Consequences of Martin's Axiom* (Cambridge University Press, Cambridge).

[36] Freudenthal, H. (1936). Einige Sätze über topologische Gruppen, *Ann. Math.* **37**, pp. 46--56.

[37] Frobenius, G. (1896). Über Gruppencharactere, *Sitzungsber Preuss. Akad. Wiss.*, phys.-math. K1., pp. 985-1021.

[38] Frolík, Z. (1967). Homogeneity problems for extremally disconnected spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **8**, pp. 757--763.

[39] Fuchs, L. (1970). *Infinite Abelian groups*, Vol. I (Academic Press, New York).

[40] Gel'fand, I. M. (1939). On normed rings (O normirovannyh kol'zah), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **23**, pp. 430--432 (*in Russian*).

[41] Gel'fand, I. M. (1941). Normed rings (Normirovannye kol'za), *Matem. Sb.* **9**, pp. 3--24 (*in Russian*).

[42] Gillman, L. and Jerison, M. (1976). *Rings of Continuous Functions* (Springer-Verlag, Berlin).

[43] Glicksberg, I. (1959). Stone--Čech compactifications of products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90**, pp. 369--382.

[44] Glicksberg, I. (1962). Uniform boundedness for groups, *Canad. J. Math.* **14**, pp. 269--276.

[45] Graev, M. I. (1948). Free topological groups, In: *Topology and Topological Algebra*, Translations Series 1, **8** (1962), pp. 305--364 (American Mathematical Society). Russian original in: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **12** (1948), pp. 279--323.

[46] Graev, M. I. (1950). Theory of topological groups I, *Uspekhi Mat. Nauk* **5**, pp. 3--56 (*in Russian*).

[47] Guran, I. I. (1981). On topological groups close to being Lindelöf, *Soviet Math. Dokl.* **23**, pp. 173--175.

[48] Guran, I. I. (1981). Topological groups and properties of their subspaces, PhD thesis, 68 pp. (Moscow State University, Moscow; *in Russian*).

[49] Haar, A. (1933). Der massbegriff in der Theorie der kontinuerlichen Gruppen, *Ann. Math.* **34**, pp. 147--169.

[50] Hartman, S. and Mycielski, J. (1958). On embeddings of topological groups into connected topological groups, *Colloq. Math.* **5**, pp. 167--169.

[51] Hernández, C., Tkachenko, M. G., Rendón O. y Villegas L. M. (1998). Grupos Topológicos, UAM.

[52] Hernández, C. (2001). Condensations of Tychonoff universal topological algebras, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **42**, 3, pp. 529--533.

[53] Hernández, C. and Tkachenko, M. G. (1998). Subgroups of $\mathbb{R}$-factorizable groups, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **39**, pp. 371--378.

[54] Hernández, C. and Tkachenko, M. G. (2002). A note on ω-modification and completeness concepts, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3) **8**, pp. 93--96.

[55] Hernández, C. and Tkachenko, M. G. (2006). Three examples of pseudocompact quasitopological groups, *Topol. Appl.* **153**, 18, pp. 3615--3620.

[56] Hewitt, E. (1948). Rings of real-valued continuous functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **64**, pp. 45--99.

[57] Hewitt, E. (1962). Some applications of compactness in Harmonic Analysis, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, pp. 204--210 (Proc. Prague Topol. Symp., September, 1961).

[58] Hewitt, E. and Ross, K. A. (1963). *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. I (Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg--New York).

[59] Hewitt, E. and Ross, K. A. (1970). *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. II (Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg--New York).

[60] Hindman, N. and Strauss, D. (1998). *Algebra in the Stone--Čech Compactification -- Theory and Applications* (Walter de Gruyter and Co., Berlin).

[61] Hodel, R. E. (1984). Cardinal functions I, In: *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds., pp. 1--62 (North-Holland, Amsterdam).

[62] Hofmann, K.-H. and Morris, S. A. (1998). *The Structure of Compact Groups: A Primer for Students --- A Handbook for Experts* (Walter de Gruyter Publ., Berlin).

[63] Husain, T. (1966). *Introduction to topological groups* (W. B. Saunders Comp., Philadelphia--London).

[64] Isbell, J. R. (1964). *Uniform spaces* (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence).

[65] Juhász, I. (1971). *Cardinal Functions in Topology* (Math. Centre Tracts 34, Amsterdam).

[66] Kakutani, S. (1936). Über die Metrization der Topologischen Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **12**, pp. 82--84.

[67] Kampen, E. van (1935). Locally bicompact Abelian groups and their character groups, *Ann. Math.* **36**, pp. 448--463.

[68] Kampen, E. van (1936). Note on a theorem of Pontryagin, *Amer. J. Math.* **58**, 1, pp. 177--180.

[69] Kelley, J. L. (1955). *General Topology* (van Nostrand, New York).

[70] Korovin, A. V. (1992). Continuous actions of pseudocompact groups and axioms of topological group, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **33**, pp. 335--343.

[71] Kunen, K. (1980). *Set Theory* (North Holland, Amsterdam).

[72] Kuz'minov, V. I. (1959). On a hypothesis of P. S. Alexandroff in the theory of topological groups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **125**, pp. 727--729.

[73] Leja, F. (1927). Sur la notion du groupe abstrait topologique, *Fund. Math.* **9**, pp. 37--44.

[74] Levi, E. (1905). Sulla struttura dei gruppi finiti e continui, *Atti Accad. Torino* **40**, pp. 3--17 (*in Italian*).

[75] Lie, S. and Engel, F. (1888--1893). *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, Teubner 1, 2, 3).

[76] Malykhin, V. I. (1975). Extremally disconnected and similar groups, *Soviet Math. Dokl.* **16**, pp. 21--25. Russian original in: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **220**, pp. 27--30.

[77] Malykhin, V. I. (1979). On extremally disconnected topological groups, *Uspekhi Mat. Nauk* **34**, 6, pp. 59--66 (*in Russian*).

[78] Malykhin, V. I. (1987). Nonpreservation of properties of topological groups on taking their square, *Sib. Math. J.* **28**, pp. 639--645.

[79] Markov, A. A. (1935). Über endlich-dimensionale vektor räume, *Ann. of Math.* **36**, pp. 464--506.

[80] Markov, A. A. (1941). On free topological groups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **31**, pp. 299--301 (*in Russian*).

[81] Markov, A. A. (1944). On the existence of periodic connected topological groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **8**, pp. 225--232.

[82] Markov, A. A. (1944). On unconditionally closed sets, In: *Topology and Topological Algebra*, Translations Series 1, **8**, pp. 273--304. American Math. Society, 1962. Russian original in: *C. R. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **44** (1944), pp. 180--181.

[83] Markov, A. A. (1945). On free topological groups, In: *Topology and Topological Algebra,* Translation Series 1, **8** (1962), pp. 195--272. American Math. Society. Russian original in: *Izv. Akad. Nauk SSSR* **9** (1945), pp. 3--64.

[84] Mazur, S. (1952). On continuous mappings of Cartesian products, *Fund. Math.* **39**, pp. 229--238.

[85] Mill, J. van (1983). A topological group having no homeomorphisms other than translations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **280**, 2, pp. 491--498.

[86] Mill, J. van (1985). Closed images of topological groups, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **41**, pp. 419--426.

[87] Montgomery, D. (1936). Continuity in topological groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42**, pp. 879--882.

[88] Montgomery, D. and Zippin, L. (1955). *Topological Transformation Groups*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Tract 1 (Interscience Publ., New York).

[89] Neumann, J. von (1934). Zum Haarschen Mass in Topologishen Gruppen, *Compositio Math.* **1**, pp. 106--114.

[90] Nummela, E. C. (1980). The completion of a topological group, *Bull. Austral. Math. Soc.* **21**, pp. 407--417.

[91] Nummela, E. C. (1982). Uniform free topological groups and Samuel compactifications, *Topol. Appl.* **13**, pp. 77--83.

[92] Nyikos, P. J. (1981). Metrizability and the Fréchet--Urysohn property in topological groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83**, pp. 793--801.

[93] Peter, F. and Weyl, H. (1927). Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuerlichen Gruppe, *Math. Ann.* **97**, pp. 737--755.

[94] Pontryagin, L. S. (1934). Sur les groupes abéliens continus, *C. R. Acad. Sci. Paris* **198**, pp. 328--330.

[95] Pontryagin, L. S. (1973). *Continuous Groups*, Third edition (Nauka, Moscow; *in Russian*).

[96] Raĭkov, D. A. (1946). On the completion of topological groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **10**, pp. 513--528 (*in Russian*).

[97] Robinson, D. J. F. (1982). *A Course in the Theory of Groups* (Springer-Verlag, Berlin).

[98] Roelcke, W. and Dierolf, S. (1981). *Uniform structures on topological groups and their quotients* (McGraw-Hill International Book Co., New York).

[99] Rudin, M. E. (1975). *Lectures on Set-Theoretic Topology*, Conf. Ser. in Math. **23** (Amer. Math. Soc., Providence).

[100] Schreier, O. (1925). Abstrakte kontinuerliche Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4**, pp. 15--32.

[101] Shakhmatov, D. B. (1984). Condensations of universal topological algebras preserving continuity of operations and decreasing weights, *Moscow Univ. Math. Bull.* **39**, 2, pp. 57--60. Russian original in: *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 2, pp. 42--45.

[102] Shapiro, L. B. (1993). On the homogeneity of dyadic compact Hausdorff spaces, *Math. Notes* **54**, 3-4, pp. 1058--1072. Russian original in: *Mat. Zametki* **54**, 4, pp. 117--139.

[103] Spanier, E. H. (1966). *Algebraic Topology*, New York.

[104] Stone, A. H. (1948). Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54**, pp. 977--982.

[105] Teleman, S. (1957). Sur la représentation linéaire des groupes topologiques, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **74**, pp. 319--339.

[106] Tkachenko, M. G. (1998). Introduction to topological groups, *Topol. Appl.* **86**, 3, pp. 179--231.

[107] Tychonoff, A. N. (1930). Über die Topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.* **102**, pp. 544--561.

[108] Tychonoff, A. N. (1935). Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.* **111**, pp. 767--776.

[109] Varopoulos, N. T. 1964. A theorem on the continuity of homomorphisms of locally compact groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **60**, 3, pp. 449--463.

[110] Veech, W. A. (1977). Topological dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83**, pp. 775--830.

[111] Vilenkin, N. Ya. (1958). Dyadicity of the group space of bicompact commutative groups, *Uspehi Mat. Nauk* **13**, 6 (84), pp. 79--80 (*in Russian*).

[112] Vries, J. de (1975). Pseudocompactness and the Stone--Čech compactification for topological groups, *Nieuw Archiev voor Wiskunde* **23**, pp. 35--48.

[113] Vries, J. de (1978). On the existence of *G*-compactifications, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.* **26**, pp. 275--280.

[114] Vries, J. de (1993). *Elements of Topological Dynamics* (Kluwer Academic Publ., Dordrecht--Boston--London).

[115] Weil, A. (1937). *Sur les Espaces a Structure Uniforme et sur la Topologie Generale*, Publ. Math. Univ. Strasbourg (Hermann, Paris).

[116] Weil, A. (1950). *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications*, Actualités Sci. Ind. **869**, Paris.

[117] Wilcox, H. J. (1966). Pseudocompact groups, *Pacific J. Math.* **19**, pp. 365--379.